TRATTATO
DI ARITMETICA

DIVISA IN DUE PARTI

NELLA PRIMA SI ESPONGONO LE COMUNI TEORIE, E QUELLA DELLE RAGIONI E PROPORZIONI,

NELLA SECONDA, SI ESPONE QUELLA DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE, GEOMETRICHE, E DE' LOGARITMI; E L'APPLICAZIONE LORO A DIVERSI PROBLEMI. INOLTRE LA TEORIA DELLE PERMUTAZIONI, E COMBINAZIONI.

OPERA

DELL' ABBATE

BENVENUTO PERRONE.

NAPOLI
NELLA TIPOGRAFIA DELLA MINERVA
strada s. Anna de' Lombardi num. 10.

1828.

INTRODUZIONE.

Giammai l' umana Mente spiega piú libera le ale nelle sue contemplazioni, che quando sia stata di buon' ora, e con giusto metodo sviluppata la sua facoltà ragionatrice. Questa dando alle idee quella precisione che abbisognano, ne rende chiari i concetti, ed agevole la connessione; onde assimilate quelle in ordinate anella, manoducono l' uomo alla conoscenza de' rapporti i più reconditi che vi ha fra le cose.

Quello che impara alla mente di operare si mirabile magistero, è lo studio delle scienze esatte. Queste diriggendo il nostro animo per diritti sentieri, l' infondono insensibilmente la sapienza, e lo conducono alla conoscenza del Vero, Bene unico dell' uomo che pensa.

Sono coteste scienze le matematiche, delle quali, abbenchè sembri limitato il pomerio, come quelle che sul *quanto* solo si aggirano, pure la loro applicazione alla scienza della Natura forma un campo assai vasto, nel quale chiama a rassegna i più intralciati fenomeni, e ne dichiara le cause. Simile alla luce del sole, porgono al nostro animo il più chiaro lume, onde la veneranda faccia del Vero ci si discopre.

Il primo gradino, per lo quale si ascende a queste scienze nobilissime, è appunto l'Aritmetica, e la Geometria. Questa, come Natura stessa ne insegna, è destinata alla contemplazione delle grandezze continue, quella allo esame, ed al calcolo delle discrete, e delle continue ancora, se ad unità assunte riducansi le loro parti.

L'uso dell'Aritmetica si estende a tutte le scienze, perchè tutte abbisognano di calcolo. Quanto dunque ne è l'importanza! La Società poi ne ritrae grandissimi vantaggi, e la sperienza ci mostra essere ella attissima a coltivare la ragione, senza cui torpida, e confusa si rimane nelle ricerche. Quindi è che tutti quelli che vogliano regolar-

mente percorrere la studiosa carriera, devono indispensabilmente addirsi à questa scienza.

Ora, per rendere chiaro, e ritenevole ciò che i Matematici discoprono nella contemplazione della *quantità*, è d'uopo dichiarare il senso di alcune voci usitate nella sposizione delle loro invenzioni. Tali sono i vocaboli *Definizione*, *Assiomi*, *Postulati*, *Teoremi*, *Problemi*, *Lemmi*, *Corollarj*, *Scolj*.

I. *Definizione* è la chiara, distinta, e generale nozione di qualche cosa.

II. *Assioma* è l' affermazione della chiara, ed evidente conoscenza delle cose, e de' rapporti loro.

III. *Postulato*, o *Dimanda* è l' affermazione di ciò che puossi facilmente eseguire.

IV. *Proposizione* esprime uno, o più concetti della nostra mente, co' quali affermiamo, o neghiamo quello che conviene, o sconviene a qualche cosa, sotto date condizioni.

V. *Teorema* è l' enunciazione di ciò che è proprio delle cose, sotto date condizioni. Costa esso di due parti, cioè di *Proposizione*, e di *Dimostrazione*.

La *Proposizione* enuncia ciò che possa

convenire, o sconvenire alla cosa, sotto certe condizioni. La *Dimostrazione* espone le ragioni, onde l' intelletto sia convinto di ciò che si enuncia.

La *Proposizione* si distingue in *Ipotesi*, e *Tesi*. L' *Ipotesi* numera le condizioni, sotto cui qualche cosa si afferma, o si nega. La *Tesi* contiene ciò che si afferma, o si nega.

VI. Il *Problema* propone a fare qualche cosa. Costa esso di tre parti: di *Proposizione*, di *Risoluzione*, di *Dimostrazione*. La *Proposizione* indica ciò che debba farsi. La *Risoluzione* contiene gli atti, che si adoprano, col dovuto ordine, onde eseguire il proposto. La *Dimostrazione* è l' esposizione delle ragioni, dalle quali apparisce essersi, con quelle cose fatte, pervenuto all' intento.

VII. Il *Lemma* è o un *Teorema*, o un *Problema*, che si premette ad un Teorema, o ad un Problema, per facilitare la dimostrazione del primo, e l' esecuzione del secondo.

VIII. *Corollario* è ciò che si deduce immediatamente da un Teorema, o da un Problema.

IX. *Scolio* è la dichiarazione di ciò che è dubbioso, o oscuro; o l' estensione di ciò,

che si è dimostrato ne' Teoremi, o operato ne' Problemi, ad altri soggetti affini.

Tutti questi vocaboli sono ovvj non solo nella presente Aritmetica, ma negli Elementi Piani, e Solidi, che l' autore diede già alla luce fin dal 1826.

TRATTATO

DI ARITMETICA

PARTE PRIMA.

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI.

1. *Grandezza*, o *quantità* è tutto ciò che può ricevere aumento, o diminuzione, è composto di parti, e può dividersi in parti. Ella è di due specie, l'una *continua*, l'altra *discreta*. La *continua* è quando le parti della grandezza sono connesse in modo, da non potersi discernere: tali sono le linee, le superficie, i solidi, il tempo, che fluisce senza intermissione. La *discreta* è quando le sue parti sono separate, e distinte, come un mucchio di frumento, in cui distinguonsi i granelli varii, una massa di arena, ec.

2. La scienza, che impara a calcolare le grandezze fra loro, si appella *Aritmetica*, che viene dal Greco αριθμο, *numero*. Per calcolare abbisognano simboli, i quali esprimano in compendio le grandezze.

3. Diconsi *simboli*, o *cifre* quelle delineature, che, per comune consenso, sonosi stabilite fra gli uomini, per indicare le grandezze. Tali sono 0, 1,2, 3,4,5,6,7,8,9, che si pronunziano così: zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, e nove. Sono essi, o generali, o particolari. I generali sono le lettere dell' alfabeto, come a, b, c, d, e, f, ec. I particolari sono i già scritti, 0,1,2,3, ec. detti Arabi, perchè gli Arabi le inventarono.

4. L' *Unità* è quella, per la quale ciascuna delle cose che sono si chiama una.

5. Le cose da calcolarsi sono di diversa natura, le quali si riducono a *lunghezza*, a *superficie*, a *solidità*, al *tempo*; per le grandozze continue, le cui unità sono per noi Napolitani il palmo, il palmo quadrato, il palmo cubico, e per il tempo generalmente si assume il giorno, l' ora, il minuto primo e 'l minuto secondo. Per il *Peso* l' unità può essere il cantajo, il rotolo, la libra, l' oncia, se si tratta di calcolare cantaja, rotoli, libbre, once. Per le *Monete* l'unità è il *Docato*, che anche esso è composta di altra unità, che è il carlino. L' *Unità* di capacità se si tratta di fluidi è la caraffa, il barile, se di frumento l' unità è la misura, il tomolo ec. Queste unità sono state stabilite per convenzione, ma, *fissate* una volta, per la giustezza de' calcoli, debbono essere invariabili.

6 Il *numero* è la moltitudine composta di unità. È o *semplice*, o *composto*. Numero semplice è il 2, e tutti gli altri che seguono fino al 9

inclusivamente. Dal 10 in poi, i numeri si chiamano *composti*.

7. Il numero è pure di due altre sorte, *astratto*, e *concreto*, il primo è quando esprime una collezione di unità, senza che questa sia presa da qualche oggetto particolare, come 3, 8, ec; se poi risulti dalla collezione di particolari cose, si chiama *concreto*. Come 3 docati, 8 cantaja ec.

8. Numeri *omogenei* sono quelli, che dalla stessa unità si compongono, come 12 docati, 3 docati, poiche il docato ripetuto dodici volte forma il 12, e ripetuto *tre* volte forma il 3. *Eteregenei* poi, quando da diverse unità si compongono, come 30 palmi, 50 rotoli.

9. Il numero è o *intero*, o *fratto*. *Intero* è quello che si risolve nelle unità assunte, come il 3, il 7, ec. *Fratto* è quello che non può in unità risolversi, ma in parti dell' unità già assunta, di che diremo a suo luogo.

10. *Assioma*. Il tutto è uguale alle sue parti prese insieme.

11. *Postulato*. Per indicare che una cosa sia aggiunta all'altra si fa uso del segno + che si pronunzia più, talche $8 + 4$ vale 12, inoltre i due tratti = significano uguale, come $8 + 4 = 12$.

12. Son convenuti gli Aritmetici di esprimere i numeri composti con quelle stesse cifre, con cui esprimono i numeri semplici; e perchè riuscisse facile, hanno stabilito che vi fossero unità di diverso ordine, e che il valore di una di un dato ordine fosse decupla del valore dell' altra di ordine

immediatamente inferiore. Per passare dall' unità di un ordine a quella di valore declupo, trasferiscono la cifra di un posto alla sinistra, la quale portata di un altro posto alla sinistra diviene decupla di questa, e quindi contnpla della prima. Questi ordini cominciano per i numeri interi dell' unità, la quale aumentata del decuplo, diviene dieci, e questa aumentata del suo decuplo diviene cento, poi, mille, diecimila, e così sempre da dieci in dieci. Laonde chiamando unità di primo ordine l' uno, di secondo ordine il dieci, di terzo ordine il cento, e così successivamente, si potrà esprimere il valore di qualunque numero, comunque esteso. Sia per es: il n. $845,678^3,456,784^2,569,384^1,567,382$. Per poterlo pronunziare, giusta il suo valore, si analizzino le unità de' diversi ordini, che vi si contengono, e procedendo da destra, a sinistra, come si è detto, si vedrà che il 2 esprime due unità di prim' ordine, ovvero semplici, l' 8, che è di un posto avvanzato a sinistra, disegna unità decupla delle prime, e perciò una collezione di unità di second' ordine, ovvero di decine, onde si pronunzia ottanta, che unito al 2 si pronunzia ottantadue. Passando alla terza cifra a sinistra si va alle unità decuple della precedente, ovvero alle centinaja, uno dei quali è unità di terz' ordine, onde il 3 vale trecento unità, il 7 esprime unità di quarto ordine, o sia migliajo, che è decuplo del centinajo, ed in seguito si passa all' unità di quinto ordine, o sia al diecimila, di poi al centomila, al milione, alle decine di milioni, e così succes-

sivamente ai decupli : così che quel numero, che letto in ciascuno dei suoi caratteri, si dovrebbe pronunziare così : due unità + ottanta unità + trecento + settemila + sessantamila + cinquecentoto mila + 4 milioni + ottanta milioni + trecento milioni + ec. si pronuncierà assai più speditamente così : ottocento quaranta cinquemila seicento sessantotto trilioni quattrocento cinquantasei mila settecentottanta quattro bilioni cinquecento sessantanovemila trecentottanta quattro milioni cinquecento sessantasette mila trecentottanta due.

13. *Scol.* La cifra zero isolata non contiene alcun valore, ma congiunta a destra di un dato numero ne accresce di dieci il valore. Così stando 1 solo, vale una sola unità, aggiunto a destra un zero, divien 10, e se al dieci si unisce un' altro zero, divien 100, e se si aggiunge successivamente un' altro zero, diviene 1000, 10000, 100000 ec.

14. Finalmente, è d' avvertirsi, che il zero trovandosi scritto in mezzo ad un dato numero disegna nel posto che tiene, la mancanza dell' unità di quel dato ordine, il cui luogo esso occupa. Così 390804, i zeri di tal numero indicano, il primo a sinistra, mancanza dell'unità milliarie, o di quart' ordine, il secondo, di decine, o secondo ordine, onde si pronunzia così : trecento novantamila ottocento e quattro.

15. Tutte le operazioni di cui si fa uso in Aritmetica pel calcolo di numeri, si riducono a quattro, cioè all'*Addizione*, alla *Sottrazione*, alla *Moltiplicazione*, alla *Divisione*. Incominciamo dall' *Addizione*.

CAPITOLO II.

DEL CALCOLO DEI NUMERI INTERI.

Addizione.

16. L' *Addizione* è la collezione di più numeri omogenei in un solo. É d' essa un problema, il quale disegna di ritrovare un numero, che sia uguale a numeri dati. I numeri assegnati si appellano *dati*, quello che deve ritrovarsi si *chiama Somma.*

17. Problema. *Dati più numeri semplici*, o *composti trovarne la loro somma*

Si dispongono in colonne verticali, le quali saranno tante di numero, quante sono le cifre che contiene il massimo dei numeri dati; dispongansi in modo le cifre di ciascuno, che le unità cadano sotto le unità, le decine, ovvero le unità di second' ordine, sotto quelle di second' ordine del primo numero scritto, quelle di terzo, ovvero le centinaja, sotto le centinaja, le migliaja sotto le migliaja, ec.

Di poi si cominci dalla sinistra colonna, e si numerino tutte le semplici unità. Cotesto numero di unità o sarà meno del 10, o 10, o maggiore del 10.

Se è meno del 10, si scrive sotto la prima linea verticale il numero delle semplici unità, e così si faccia per le altre colonne delle decine, del-

le centinaja, migliaje, ec. Se si giunge al 10, si scriva zero, e si porti la decina, per aggiungerla alle decine della seconda colonna, e così pure se si giunga al 20, al 30, al 40, ec., scrivendo zero, si porti alla seguente colonna il numero delle decine, e così si pratichi per le altre colonne.

ESEMPIO I.

Dati i numeri 8748, 2749, 984, 3506, 28 *ritrovare la loro somma.*

	8748
	2749
	984
	3506
	28
Somma	16015

Scritti i numeri nel modo come si è sopra additato, cioè le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, le migliaja sotto le migliaja, ec. Si cominci l'addizione delle unità, in questo modo cioè: 8, e 9 fanno 17, e 4 fanno 21, e 6 fanno 27, e 8 fanno 35. Scrivo la cifra cinque sotto le unità, e ritengo il 3, che esprime decine, per unirlo alla colonna delle decine.

Passando a cotesta colonna dico 3, già ritenuto, e 4, fanno 7, e 4, fanno 11, ed 8,

fanno 19, e 0 fanno anco 19, e 2 fanno 21. Scrivo 1, esprimente decine, e ritengo il 2, che esprime centinaja, per unirlo alle unità centenarie della colonna delle centinaja.

Per la qual cosa passando a cotesta colonna dico 2, e 7 fanno 9, e 7 fanno 16, e 9 fanno 25, e 5 fanno 30. Scrivo 0 sotto la colonna delle centinaja, e ritengo il 3, per unirlo alle migliaja, che si contengono nella quarta colonna.

Finalmente passando alla quarta colonna dico 3, ed 8 fanno 11, e 2 fanno 13, e 3 fanno 16. Scrivo il 6 sotto la colonna delle migliaja, e ritengo l' 1 per unirlo alle decine di migliajo dell' altra colonna, la quale, come non esiste, così scrivo a sinistra di 6 l' 1, e termino l' operazione. Laonde i numeri proposti uniti insieme fanno 16015 C. B. F.

ESEMPIO II.

Debbansi ridurre ad un solo numero i numeri 3845, 584, 781, 12.

MODO I.		MODO II.	
3845 584 781 12	numeri dati	3845 584 781 12	numeri dati
somma 5222		3012 2210	
		somma 5222	

In ambo i modi si dispongono, come sopra i numeri in colonne verticali, ponendo le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, e le migliaja sotto le migliaja, e si aggiungano fra loro quelli del modo 1.°, come al solito, cominciando, cioè dalle unità semplici, e poi alle composte successivamente, e si avrà per somma il numero 5222.

17. *Scol.* Cotesta operazione può essere eseguita per un ordine inverso al primo, cioè cominciando la numerazione non da sinistra, ma da destra nel modo seguente.

Dispongansi i numeri nel modo 2.° come al

solito, e cominciando da destra, si dica 3, e come non vi è altro numero, che a lui corrisponde, si scrive sotto la linea orizzontale 3, che esprime 3mila: di poi nella seconda colonna, a destra dicasi 8, e 5 fanno 13, e 7 fanno 20, che sono centinaja, e siccome 20 centinaja fanno 2 migliaja, così scrivo il 0 sotto la colonna delle centinaja, e le 2 migliaja le scrivo sotto le migliaja.

Di poi passando alla terza colonna a destra, dico: 4, ed 8 fanno 12, ed 8 fanno 20, ed 1 fanno 21, le quali sono decine, cioè due centinaja, ed una decina. Scrivo perciò la decina 1 sotto le decine, e le 2 centinaja sotto le centinaja. Indi giungo alla quarta colonna, e dico 5, e 4 fanno 9, e 1 fanno 10, e 2 fanno 12, il quale siccome contiene una decina, e 2 unità, così scrivo il 2 sotto le unità, e l' uno sotto le decine.

Finalmente aggiungo fra loro i due numeri 3012, 2210, che mi danno 5222, somma uguale a quella del modo 1.°

18. Evvi un terzo modo, che quantunque sia soggetto a ripetizioni di operazioni, pure sarà utile appresso.

MODO III.

```
 4567 }
 8983 } numeri dati
  297 }
=====
   17
  230
 1600
12000
-----
13847
```

In questo terzo modo l' operazione si esegue così. Si comincia dalla sinistra, e si numerino al solito le unità, che sono 17, e si scriva 17; di poi si vada alle decine, che unite fanno 23 decine, e si scrive 23, in modo che il 3 resti sotto la colonna delle decine, e 'l 2 sotto quella delle centinaja, per conseguenza resta vuoto il posto delle unità, che si riempirà col zero, per rendere così uniformi le colonne. Indi passo alla colonna delle centinaja, le quali, come fanno 16, cioè un migliajo, e sei centinaja, distendo il 16 in modo, che il 6 cada sotto le centinaja, e l' 1, che è il migliajo, cada in dietro, al posto delle migliaja, e pongo 00 a destra, per empire la linea. Giunto alla quarta colonna a sinistra, dico 4, ed 8 fanno 12, cioè dodici migliaja, situo il 12 alla sua sinistra, e riempio di zeri i luoghi vuoti. Finalmente ag-

giungo tutti i numeri così disposti, secondo il modo 1.°, ed ottengo la somma di 13847.

La dimostrazione è chiara dalle stesse operazioni fatte; poichè le rispettive somme sono l' aggregato delle unità, delle decine, delle centinaja, delle migliaja, delle decine di migliaja, ec., e giusta l' assioma, che il tutto è uguale alle parti, sarà la somma in ciascun modo uguale a tutti i numeri dati. C. B. F. D.

CAPITOLO III.

DELLA SOTTRAZIONE DE' NUMERI INTERI.

19. La *Sottrazione* è un Problema, col quale si cerca di ritrovare la differenza di due numeri omogenei disuguali, ovvero dati due numeri disuguali, trovare l' eccesso del maggiore sul minore.

20. *Post.* Per indicare la sottrazione si fa uso del segno —, che si pone a sinistra del numero che si vuole sottrarre: così 8—6 esprime che da 8 si vuole togliere 6.

21. *Prob. Dati due numeri disuguali, trovare la loro differenza.*

Scrivansi i numeri, i quali devono essere omogenei, l' uno sotto l' altro, e propriamente il minore sotto del maggiore, mettendo le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, le migliaja sotto le migliaja, ec., come nell' addizione.

Di poi si tiri una linea orizzontale, e dalla parte destra si cominci a sottrarre le unità dalle unità, le decine dalle decine, e così di seguito, ed il residuo si scriva sotto le unità, decine, centinaja, ec.

Nel fare l'operazione, se mai avvenga che la cifra del sottoposto numero sia maggiore della corrispondente nel numero superiore, in tal caso bisogna prendere nel numero superiore dalla cifra, verso sinistra, una unità, la quale essendo decupla della sua precedente a destra, potrà dalla somma di tal decina, e di quelle unità togliersi la cifra inferiore, e scriverassi il residuo sotto. In tal modo la cifra del numero superiore, da cui è stata tolta l'unità, resterà diminuita di 1

In fine se la cifra del numero superiore sia uguale a quella del numero inferiore, scriverassi il zero sotto. Operando similmente per tutte le altre cifre corrispondenti, si otterrà il residuo.

Se il numero maggiore stia sotto, e il minore sopra, la sottrazione sarà la stessa, ma soltanto si eseguirà in ordine inverso, cioè dalle unità dell'inferiore si toglieranno quelle del superiore, ed al residuo si scriverà —, il che dinota che il residuo è negativo.

ESEMPIO I.

Siano i due numeri disuguali 86709 70899, *e vogliasi il secondo sottrarre dal primo.*

86709	48325
70899	97432
15810 residuo, o differenza	—49107 residuo negativo

Si dispongano l' uno sotto l' altro, il maggiore sopra, il minore sotto, ed in modo che le unità siano sotto le unità, le decine sotto le decine, ec. Di poi si cominci da sinistra, dicendo, dal 9 tolto 9, rimane 0, e si noti o sotto la linea; indi procedendo sempre a sinistra si dica: da 0 tolto il 9, non può ciò eseguirsi, per essere 9 maggiore di 0, a tal uopo dalla terza cifra 7 si tolga 1, che uguaglia 10 decine, quindi si dica da 10 tolto 9 rimane 1, che si scrive a sinistra della prima, sotto la linea. Il 7 ora si è ridotto a 6 unità centenarie, e dicasi di nuovo dal 6 tolto l' 8 non si può, e si prenda un migliajo, che unito al 6 dà 16 centinaja, quindi si dica da 16 tolto 8 rimane 8, che si noti appresso sotto la linea, ma a sinistra. Il 6 è divenuto 5, onde da 5 tolto 0 rimane 5, il quale si scriva similmente a sinistra, e finalmente da 8 tolto 7 rimane 1, che scritto a sinistra nel modo stesso, si ha di residuo, o di differenza tra i

due numeri dati, il numero 15810, che è quello che si cercava.

La dimostrazione è chiara dalla stessa operazione, poichè oprando nel modo indicato, si hanno i particolari residui in unità, decine, centinaja, ec. Per la qual cosa riunendo insieme il numero, che esprime il residuo, e 'l numero minore ossia il sottraendo, si otterrà il sottratore. Poichè il sottratore, che è il numero maggiore, è uguale al sottraendo, insieme col residuo. Il che è una pruova pure della sottrazione. C. B. F. D.

ESEMPIO II.

Si abbia un credito di docati 800, 789, 078, 402, *da cui voglia sottrarsi la somma di docati* 587958407943

800789078402 Sottrattore
587958407943 Sottraendo
―――――――――
212830670459 Residuo, o differenza
―――――――――
800789078402 Pruova

Si dispongano, come nel primo esempio i numeri, l'uno sotto dell'altro, e poi, tirata sotto la linea, si sottraggano le unità dalle unità, le decine dalle decine, e così di seguito, si avrà il numero 212830670459, che è l'eccesso del maggiore sul minore de' proposti numeri. Ed aggiungendo cote-

sto residuo al minor numero 587958407943, si avrà il maggiore 800789078402. Il che, oltre di essere una pruova pratica dell' operazione regolarmente fatta, è pure una dimostrazione.

CAPITOLO IV.

DELLA MOLTIPLICAZIONE DEGL' INTERI.

21. La *Moltiplicazione* è un Problema, col quale, proposti due numeri, se ne cerca un altro, che in se contenga tante volte l' uno de' due, quante volte l' unità comprendesi nell' altro, o pure, ripetere un numero tante volte, quante unità sono nell' altro. Dei numeri dati, l' uno chiamasi *moltiplicando*, l' altro *moltiplicatore*; quel numero poi che si cerca chiamasi *fatto*, o *prodotto*.

Così moltiplicare 25 per 4 indica che il numero da ritrovarsi tante volte in se comprenda il 25, quante unità sono nel 4, o, che è lo stesso, replicare il 25 4 volte, e poi trovarne la somma, il 25 appellasi *moltiplicando*, il 4 *moltiplicatore*, ed il 100 *prodotto*, ovvero *fatto*. In generale i numeri da moltiplicarsi chiamansi *fattori*.

22. *Post.* La moltiplicazione si indica col segno $\times$, talchè posto questo fra due numeri, per es. 9, e 5, così 9×5, indica doversi il 9 moltiplicare per 5.

23. *Probl. Costruire la Tavola Pitagorica, ove sono indicati tutti i prodotti dei numeri semplici.*

Si esponga un quadrato, e si divida ciascun lato in 9 parti uguali, e congiunti i punti delle divisioni, si verranno a costruire 81 piccoli quadrati.

Si scriva nella prima colonna verticale a sinistra la serie naturale de' numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e la stessa serie di numeri naturali si scriva nella linea superiore orizzontale.

Si scrivano di poi nella seconda linea orizzontale a destra del 2, il quale è nella colonna verticale, il suo doppio, il triplo, il quadruplo ec. come sono 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18; e così si pratichi nella terza, quarta, e quinta, ec. linea orizzontale. Dico che cotesta Tavola contenga tutti i prodotti de' numeri semplici fra loro.

In primo luogo il prodotto dell' unità per ciascuno de' numeri naturali 1, 2, 3, ec. si contiene nella prima linea orizzontale.

2.° Il prodotto del 2 per li numeri successivi 2, 3, 4, 5, ec. della stessa linea superiore, si trovano notati nella seconda linea orizzontale, come 4, 6, 8, 10, ec., che nascono moltiplicando il 2 della verticale per ciascuno della superiore orizzontale.

3.° I prodotti del 3 della verticale per ciascuno della stessa orizzontale di sopra trovansi similmente notati nella terza linea orizzontale, quali sono 6, 9, 12, ec.

4.° Così si trovano pure nella 4.ª, 5.ª, 6.ª ec. linea orizzontale, i prodotti del 4, del 5, del 6, ec. della verticale per 2, 3, 4, 5, ec. della superiore orizzontale.

Laonde nella costruzione di questa Tavola trovansi tutti i prodotti de' numeri semplici C. B. F. e D.

TAVOLA PITAGORICA.

Linea orizzontale.

Linea verticale.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

24. *Probl. moltiplicare un numero per un altro.*

ESEMPIO I.

Propongasi a moltiplicare il numero 87803 *per* 7

Moltiplicando	87803	Fattori
Moltiplacatore	7	
prodotto	614621	

Disposti il moltiplicando, ed il moltiplicatore, come si veggono, cioè il moltiplicatore, che componesi di semplici unità, sotto le unità del moltiplicando; si comincino a moltiplicare le unità del moltiplicando per quelle del moltiplicatore (n.° 23), dicendo 7 volte 3 fanno 21 cioè 1 unità, e due decine: laonde scrivo 1 sotto le unità, e ritengo le due decine per unirle al prodotto delle decine per le unità 7. Passando alle decine del moltiplicando, dico 7 volte 0 fa 0, aggiungo al zero le due decine, e scrivo sotto di 0 solamente il 2, per essere 0+2 uguale a 2.

Di poi alla colonna delle centinaja del moltiplicando, dico 7 volte 8 fa 56, ossia cinquantasei centinaja, cioè 6 centinaja, e 5 migliaja: scrivo perciò 6 centinaja, e riserbo le 5 migliaja, per incorporarle alle migliaja seguenti.

Alla colonna delle migliaja, dico 7 volte 7 mila fanno 49 mila, alle quali aggiungo 5 migliaja, e fanno 54 migliaja, cioè 4 migliaja, e 5 decine di

migliaja, scrivo sotto le migliaja 4, e riserbo le 5 decine di migliajo per unirle alle altre decine di migliajo, che seguono.

Finalmente giunto alle decine di migliajo, dico 7 volte 8 fanno 56 decine di migliaja, alle quali, aggiunte le 5 decine riserbate, fanno 61 decine di migliajo, e come non vi sono altri numeri a moltiplicare, scrivo 61 a sinistra, e termino l'operazione.

La dimostrazione di ciò è chiara. Perciocchè nell'eseguire la moltiplicazione di 87803 per 7 si sono prese successivamente 7 volte le unità, 7 volte le decine, 7 volte le centinaja, 7 volte le migliaja, 7 volte le decine di migliajo, dall'aggregato delle quali è risultato il numero 614621, che è il prodotto. C. B. F. D.

Adunque il prodotto cercato è il num. 614621

ESEMPIO II.

Moltiplicare il numero 5003 } Fattori
per . . . . . . 6 }

prodotto 30018

In primo luogo disposti i numeri al solito, dico 6 volte 3 fa 18, scrivo 8, e riporto 1 decina.

In secondo luogo dico 6 volte 0 fa 0, a cui aggiunto 1 fa 1, e lo scrivo alla sinistra di 8.

Terzo dico 6 volte 0 fa 0, e scrivo appresso il 0, e 'l numero non avrà centinaja.

Finalmente dico 6 volte 5 fa 30, e come i numeri sono esauriti, scrivo 30 appresso i primi, verso sinistra, e termino l'operazione, ed il prodotto sarà 30018, trentamila, e diciotto, nel quale mancano le migliaja, e le centinaja.

ESEMPIO I.

Siano proposti ora i numeri composti 356084, *e* 739 *a moltiplicarsi fra loro*

Moltiplicando . .	356084	Fattori
Moltiplicatore . .	739	
primo prodotto par.	3204756	
secondo prodotto	1068252	
terzo prodotto	2492588	
prodotto totale .	263146076	

Dispongansi i numeri, come si veggono, in modo che le unità cadano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, ec. Indi si facciano tanti prodotti particolari, che si riducono a tre, cioè il primo prodotto di tutto il numero 356084 per 9 unità, poi lo stesso numero per 3 decine, o sia per 30 volte. Finalmente tutto il numero per 7 centinaja, o sia si facciano tre prodotti parziali, di 9 volte 356084, di 30 volte 356084, di 700 volte 356084, i quali prodotti sono il primo di unità, il secondo di decine, il terzo di centinaja; laonde il prodotto delle decine

comincerà a scriversi sotto la cifra delle decine del primo prodotto, e progredirà a sinistra, il terzo prodotto, che sono centinaja, comincerà a scriversi sotto le centinaja, anche a sinistra. Aggiunti fra loro questi tre prodotti, si avrà il prodotto totale delle unità, decine, e centinaja.

25 *Cor*. Segue da ciò che la moltiplicazione sia una breve somma.

Applicazione della Moltiplicazione ai casi pratici.

26. *Probl. I. Si domanda il prezzo di 784 canne di castoro a docati 14 la canna?*

784	Fattori	o	14	Fattori
14			784	
3136			56	
784			112	
			98	
Prodotto 10976			prodotto 10976	

In questo Probl. si propone a moltiplicare due numeri eterogenei fra loro, non ostante ciò, il prodotto deve essere omogeneo, cioè riferibile alla stessa unità. Imperocchè considerando che il prezzo di una canna è docati 14, tutto il prezzo delle 783 canne dev' essere 784 volte 14; o sia il 14 bisogna replicarlo 784 volte. Laonde il prodotto 10976 esprime docati, e non canne. C. B. F.

Probl. II. Ridurre ad ore 365 giorni?

365 } Fattori			24 } Fattori	
24 }		ovvero	365 }	
1460			120	
730			144	
Prodotto 8760			72	
		prodotto	8760	

Siccome un sol giorno comprende 24 ore, così replicando il 24 per 365 volte, si avrà il numero 8760, che esprime ore; onde si esegue cotesta moltiplicazione, mettendo unità sotto unità, decine sotto decine, e poi, come negli altri esempj, si esegua la moltiplicazione, la quale darà nel prodotto 8760 il numero delle ore.

26. *Corroll.* Essendo identici i prodotti eseguiti ne' due modi diversi di ciascun probl., si deduce essere indifferente la scelta del moltiplicando, e del moltiplicatore, potendo quello che ha fatto da moltiplicando passare a moltiplicatore, come nelli addotti esempj, ne' quali si ottiene sempre lo stesso prodotto, o che si ponga 365 per moltiplicando, e 24 per moltiplicatore, o viceversa 24 per moltiplicando e 365 per moltiplicatore.

27. *Scol.* In generale, se si abbiano a moltiplicare i numeri 3, e 15, la loro moltiplicazione sarà fatta egualmente bene, o che si dica 3×15, o 15×3,

27. *Scol.* Qui bisogna notare due cose: 1. quando debbansi moltiplicare più fattori di seguito, come i tre 360, 60, 60: 2.° quando i fattori terminano in zeri. Nel primo caso, a fine di ottenere il prodotto, fa d' uopo moltiplicare uno de' fattori per l' altro, dipoi il prodotto di questi due pel terzo fattore, l' ultimo prodotto sarà il prodotto cercato de' tre: così nell' esempio addotto, prima si è moltiplicato 360 per 60, il cui prodotto 21600 si è moltiplicato per 60, e 'l prodotto è stato 1296000. E se fossero stati quattro fattori, si sarebbe ottenuto l' ultimo prodotto, moltiplicando 1296000 per l' altro, così pure se fossero stati 5, 6, 7, ec. fattori. Nel 2.° caso, per ottenere il prodotto indicato, basterà moltiplicare le cifre significative dei fattori, e poi in ultimo aggiungere a destra del prodotto tutti i zeri de' fattori. Così nel caso dei tre 360, 60, e 60, basta moltiplicare 36 per 6, che fa 216, di poi 216 per 6, che fa 1296, e poi a destra aggiungere tre zeri, e si ha il numero 1296000, che è lo stesso del prodotto dell' esempio. Del pari se si volesse moltiplicare 500 per 3000, per 800000, il prodotto sarà 5×3×8, ed al loro prodotto si aggiungeranno 10 zeri, quanti sono nei tre fattori. Onde il prodotto sarà 120000000000, o se finalmente si volesse un numero moltiplicare per 10, per 100, per 1000, e per qualunque altro decuplo, in successione a questi, basterà al numero aggiungere un zero, e sarà moltiplicato per 10, due zeri, e lo sarà per 100, e così di seguito. Onde volendosi moltiplicare 3 per 1000, si aggiungeranno al 3 tre zeri, e si avrà 3000; alle vol-

te si agevola la moltiplicazione di più fattori, e si può eseguire a mente, se però si sappiano disporre per moltiplicandi, e per moltiplicatori que' tali fattori, che producano decine, o decine di decine, o decine di decine di decine. Così volendosi moltiplicare i numeri 3,5,7,8,10, il cui prodotto si esprime così 3×5×7×8×10, dovrebbesi moltiplicare 3 per 5, che darebbe 15, questo poi per 7, il quale non potrei facilmente eseguire all'istante, e'l prodotto 105 dovrei moltiplicarlo per 8, che sarebbe pur difficoltoso fare subito, e finalmente per 10, il quale ultimo sarebbe facilissimo per lo zero. A potervi dunque riuscire più speditamente, dispongo i numeri dati in modo, che la loro successiva moltiplica sia decine, centinaja unite a decine, ec., tali come questi 5×8×3×10×7, e con facilità si farà immediatamente il prodotto, dicendo 5×8 fa 40, di poi moltiplicando il 4 del 40 per 3, si ha 12, a cui devesi aggiungere un zero del fattore 40, e si avrà 120, poi 120×10, si moltiplica 1 per 12, a cui aggiunti due zeri de' due fattori, si avrà 1200. Finalmente, per avere il prodotto di 1200 per 7, si moltiplicherà 12 per 7, e si aggiungano al prodotto due zeri, e si avrà 8400.

37. Alle volte si esegue facilmente la moltiplicazione, sciogliendo i numeri ne' loro fattori. Così volendosi moltiplicare 48 per 15, si scinderà il 48 ne' fattori suoi, che fra gli altri sono 6, ed 8, e'l 15 ne' suoi, che sono 3, e 5. In seguito, disposti così 5×6×3×8, si avrà il prodotto facilmente, facendo 5 per 6 fanno 30, per 3 fa 90, per 8

fa 720. Infatti moltiplicando 48 per 15 si ha 720. E se il 48, e 'l 15 avessero a destra de' zeri, al prodotto 520 si dovrebbero aggiungere tutti i zeri sì del 48, che del 15. (n.° 36)

CAPITOLO V.

DELLA DIVISIONE DE' NUMERI INTERI.

38. La *divisione* è un Problema, onde, dati due numeri, rinviensi un terzo numero, il quale moltiplicato per uno di essi, dia l' altro, ovvero ritrovare quel numero, che tanto in se contenga l' unità, quanto uno di quelli contiene l' altro; il che riducesi a dividere uno de' numeri in tante parti uguali, quante unità sono nell' altro. De' due numeri dati quello, che contener deve l' altro, appellasi *dividendo*, il contenuto chiamasi *divisore*, il terzo numero chiamasi *quoto*, o *quoziente*. Così per esempio : dati i numeri 56, ed 8, ritrovare un terzo numero 7 che moltiplicato per 8 dia 56, ovvero ritrovare il numero 7 che tante volte comprendasi in 56, quanto l' unità si contiene in 8, ovvero dividere 56 in tante parti uguali, quante sono le unità dell' 8, il quale numero è 7, come nel primo caso. Il uumero 56 chiamasi *dividendo*, l' 8 *divisore*, il 7 *quoto*, o *quoziente* si appella.

39 *Corol.* Da questo apparisce che il dividendo è uquale al divisore moltiplicato pel quoto, il che può essere espresso compendiosamente così : dividendo = divisore × quoto.

40. *Scol.* È da osservarsi che i numeri, che si danno per lo presente problema possono essere o astratti, o concreti. Se sono astratti, il dividendo, e 'l divisore, in tal caso il quoto sarà astratto anch' esso. Così dato 56 per dividendo, ed 8 per divisore, il quoto sarà 7, astratto anche esso, perocchè il 56 risulta da otto volte sette, essendo il 7, l' unità del 56, come è l' 1 dell' 8. Ma se tanto il dividendo, che il divisore siano numeri concreti. In tal caso essi, o sono *omogenei*, o *eterogenei*. Se sono omogenei, come 48 docati da dividersi per 6 docati, si riduce la divisione al caso degli astratti, poichè si riduce a vedere di quanti 6 docati sia composto il 48 docati, che come è chiaro n' è composto di 8 volte, che sarà il quoto, nel quale caso l' 8 sarà un numero astratto. E se eterogenei, come per esempio 48 docati divisi per 8, il quoto sarà un numero concreto della specie del dividendo 48, che è 6 docati, perocchè il 48 è composto di 8 volte 6 docati. *In generale il quoziente è sempre della specie del dividendo, perocchè il divisore si compone della sua unità, come il dividendo del quoto.* Per la qual cosa allorchè debba farsi la divisione di due numeri eterogenei, si eseguirà, come se fossero numeri astratti tanto il dividendo, che il divisore, di poi si attribuirà al quoto la specie del dividendo. Così se si abbia a dividere 48 docati a 6 uomini, il quoto sarà 8, e dinoterà docati, poichè il 6 si compone della sua unità, che è l' uomo, così il 48 docati dell' unità sua, che è composta di 8 docati. Se vice-versa si

debbano dividere 48 uomini a 6 docati, il quoto esprimarà uomini, perchè il 6 si compone del docato, così 48 uomini del quoto 8, che sono uomini.

41 *Scol. II.* Nascendo nella divisione il quoto dal numero di volte che il divisore misura il dividendo, o vi si contiene, segue che la divisione potrebbe eseguirsi per mezzo della sottrazione, sottraendo continuamente il divisore dal dividendo, e notando il numero delle sottrazioni, il quale esprimerà il quoto. Per esempio, se si voglia dividere 24 per 8, si sottrarrà l' 8 dal 24, e 'l numero delle sottrazioni, che è 3 esprimerà il quoto. Infatti l' 8 si comprende nel 24 3 volte, ovvero il 24 risulta dal prodotto di 8 per 3, il che è analogo alla natura della divisione indicata nel (n.°) 38. Un tal metodo però riesce lungo, e quindi impraticabile ne' numeri assai complessi, onde gli Aritmetici, per ovviare a tale incomodo, hanno escogitato un metodo assai compendioso, che vado ad esporre nel seguente genereral Problema.

42. *Problema. Dividere un numero A per un altro numero B.*

1.° Si disponga il dividendo A a sinistra, e 'l divisore B a destra, ed anche vice-versa.

2.° Si esamini il numero delle cifre del dividendo, e del divisore, se siano, cioè in tutti due, numeri semplici, se il divisore abbia numero semplice, e 'l dividendo composto; e se tanto il divisore, che il dividendo contenga numeri composti.

3.° Se ambo i numeri dati siano semplici, allora coll' ajuto della tavola Pitagorica si osservi il

numero delle volte che il divisore misura il dividendo, un tal numero si noti sotto alla linea del divisore, come quoto, di poi si moltiplichi un tal quoto pel divisore, e 'l prodotto si noti sotto del dividendo, dal quale si sottragga. Se niun residuo rimane, la divisione sarà esatta; se rimane, si aggiungerà al quoto un' espressione, cioè una linea orizzontale, sopra di essa si scriva il residuo, e sotto il divisore, la quale forma parte del quoto, e sarà una frazione, di cui appresso diremo.

4.° Se il divisore sia un numero semplice, e il dividendo composto, si osservino le diverse specie delle unità, come unità, decine, centinaja, ec., e si cominci da sinistra, cioè della massima delle unità del dividendo, come per esem. dalle migliaja, se vi siano migliaja, centinaja, decine, unità, e posta la solita linea sotto del divisore, si scriva sotto di essa il numero delle volte, che il divisore si comprende nelle cifre, che esprime le massime unità, il quale sarà quoto della specie delle unità del dividendo. Possono in tal riucontro avvenire due casi, l'uno, se la prima cifra di sinistra sia uguale a quella del divisore, l'altro, se, sia maggiore, l'altro, se sia minore. Nel primo caso si scriverà uno al quoto, e si proseguirà la divisione delle altre cifre poste successivamente in giù del dividendo: nel secondo caso si scriverà al quoto il numero prossimo di volte che la cifra del divisore comprendesi nella prima del dividendo, di poi, moltiplicato il quoto pel divisore, se ne sottragga il prodotto dalla cifra del dividendo, il re-

siduo esprimerà un numero di unità di quel genere del quoto avuto, le quali saranno decine delle unità seguenti; onde ad esse aggiunte le semplici unità d' inferiore ordine si avrà un numero composto di decine, e di unità, il quale sarà un nuovo dividendo; e potrà essere diviso dal divisore, e fatta la divisione, si avrà un quoto di unità immediatamente inferiore alle unità del primo quoto, che si aggiungerà a destra di quello; di poi prese le residuali unità, ed aggiunte ad esse le unità che seguono nel dividendo, si faccia la stessa operazione, e così fino all' assorbimento delle unità di tutte le specie, o ordini, e si avrà il quoto totale. L' ultimo caso è, se la cifra delle massime unità del dividendo sia minore di quella del divisore; allora per dividendo si stabiliranno due cifre di esso, che esprimeranno un numero di decine, e di unità di un ordine inferiore alle massime, ed in tal caso si ricaverà un quoto, che sarà di quelle unità inferiori già dette, di poi il residuo esprimerà decine delle seguenti, che con quelle unite, e fattane la divisione, si avrannno unità di ordini inferiori alle già scritte nel primo quoto. E così di seguito.

5.° Se finalmente sieno numeri composti, tanto il divisore, quanto il dividendo, in tal caso si prendano del dividendo tante cifre da sinistra a destra, quante siano capaci a contenere il divisore. Ora siccome non si può a prima vista conoscere quante volte il divisore composto si comprenda nel dividendo, anche composto, si osserverà il numero di volte che l' unità di una data specie del divisore si

comprendano in quelle della stessa specie del dividendo, di poi al residuo di tali unità, se ci restino, si uniscano le unità inferiori, ma successive, e si osservi se le unità inferiori alle prime del divisore si comprendano in quelle, e così si pratichi, finchè tutte le unità di diverso ordine del divisore si comprendano nelle simili del dividendo, e se ne noti il numero al quoto, e poi fatta la moltiplicazione di questo pel divisore, si sottragga dal dividendo, e si noti il residuo, ed abbassando successivamente le altre cifre del dividendo, si faccia nel medesimo modo, si avrà, dopo assorbite tutte le cifre del dividendo, il quoto di tutte le unità diverse contenute nel dividendo, e se rimane residuo, si aggiunga come frazione al quoto.

La dimostrazione di tutti i quali casi è chiara, perocchè essendo il quoto, secondo i principj stabiliti (n.° 39.) tale parte del dividendo quale è l'unità del divisore, si saranno ottenuti i quoti delle rispettive unità del dividendo, in tal modo oprando, quali unità danno il quoto totale C. B. F.

ESEMPIO I.

Propongasi a dividere 897 per 3

```
Dividendo 897 | 3 divisore
          6   |----------
         ---  | 299 quoziente
          29
          27
         ---
          027
           27
         ---
            0
```

Scrivo questi numeri, come qui si veggono, e siccome nel dividendo vi sono delle centinaja, delle decine, e delle unità, comincio a dividere le 8 centinaja del dividendo per lo divisore 3, dicendo, il 3 quante volte contiensi nelle 8 centinaja? E poichè vi si contiene 2 volte, scrivo sotto la linea del divisore questo 2, che disegna centinaja. Inseguito moltiplico il divisore 3 per lo quoziente 2, e sottraggo il prodotto 6 dal primo dividendo parziale 8, ciò che produce di residuo 2 centinaja. Questo residuo di centinaja non essendo sufficiente a dare al quoto delle centinaja, le converto in decine, il che dà decine, le quali con le 9 decine seguenti formeranno un secondo dividendo parziale.

Perciè al lato del 2 abbasso le 9 decine del dividendo, e così avrò 29 decine a dividere per 3: dico dunque quante volte il 3 si comprende in 29? Esso vi si comprende 9 volte, il quale dinota decine. Moltiplico il 3 per 9, sottraggo il prodotto 27 da 29, e restano così 2 decine. E non potendo queste fornire altre decine al quoto,

Vicino al 2 abbasso le unità 7 del dividendo, ciò che dà 27 unità ad esser divise per 3. Dico perciò quante volte il 27 contiene il divisore 3? E poichè il contiene 9 volte, scrivo dunque al quoziente 9, che dinota unità. Di poi moltiplico 3 per 9, il che da 27 per prodotto, e sottraendolo dall' ultimo dividendo parziale, si ha zero per residuo.

La divisione rimane in tal modo compita e 'l quoziente totale richiesto è 299 esattamente.

ESEMPIO II.

Dividere 18556 per 7?

```
Dividendo 18565 ) 7 divisore
          14    }-----------
          --    )                1
           45     2652 + --- quoziente
           42                    7
           --
            36
            35
            --
             15
             14
             --
              1
```

Dispongo il dividendo, e 'l divisore, come nell' esempio precedente, e come qui si osserva.

Di poi cominciando l'operazione dalle decine di migliaja del dividendo, veggo non potere queste decine fornire un quoziente, non essendo 1 divisibile per 7, le converto in migliaja, che unite alle 8 seguenti, ho 18 mila per primo dividendo parziale. Poi dico, quante volte il 18 contiene il 7? E poichè il contiene due volte, scrivo cotesto 2 sotto la linea del divisore; indi moltiplicando un tal quoto per 7, ne sottraggo il prodotto 14 del 18, e rimane 4 mila.

Accanto al 4 scrivo 5 abbassato giù dal dividendo, e questo secondo dividendo parziale è 45 centinaja. Dico dunque quante volte il 7 comprendesi in 45? E perchè vi si contiene 6 volte, che sono centinaja: scrivo questo 6 a lato del primo quoziente: di poi moltiplico il 6 per 7, e ne scrivo il prodotto sotto il 45; e lo sottraggo da esso: mi resta 3 centinaja.

Vicino al 3 abbasso il 6 che esprime le decine del dividendo, e 'l terzo dividendo parziale è 36 decine. Dico dunque il 7 quante volte entra in 36? egli vi cape cinque volte; scrivo 5 al quoziente. Indi moltiplico 7 per 5, e ne sottraggo il prodotto 35 da 36, ed ottengo 1 decina di resta.

A fianco di 1 abbasso la cifra 5 delle unità del dividendo; e 'l quarto dividendo parziale diviene 15 unità. Dico perciò in 15 quante volte cape 7? Egli vi va 2 volte. Scrivo 2 al quoziente. Moltiplico di poi 7 per 2, e ne sottraggo il prodotto 14 dal 15, il resto è 1

Adunque il dividendo 18565 diviso per 7 dà per quoziente 2652 con un residuo 1, il quale, come non può essere diviso dal 7, s'indica una tal divisione per $\frac{1}{7}$, come fu detto nel Problema generale, e 'l quoto totale sarà $2652+\frac{1}{7}$.

42. *Scol.* Allorquando il divisore contiene un numero di cifre maggiore di una, la divisione si esegue nel modo stesso, decomponendo il dividendo in molti dividendi parziali, divisibili successivamente dal divisore. Ecco di ciò degli esempj.

ESEMPIO I.

Dividere 2171684 *per* 358.

Si dispongano al solito così

```
                         538 divisore
Dividendo  2171684 { ─────────────
           2151    }  4036+316 quoziente
           ────                ───
            1968               538
            1614
           ─────
            23544
             3228
           ─────
              316
```

Non potendosi le tre cifre del divisore comprendere nelle prime tre del dividendo, ne prendo in questo le prime quattro, cioè 2171, onde ho per primo dividendo parziale 2171: cerco quante volte il divisore 538 contiensi in quel dividendo. Ma come non è sì facile a prima vista comprendere cotesto numero di volte, per essere tanto il dividendo, che il divisore numeri assai complessi, paragono perciò solamente le centinaja del dividendo con quelle del divisore, dicendo quante volte 21 contiene 5? Il contiene 4 volte. Prima di scrivere 4 al quoziente, bisogna sapere se le decine, e le unità del dividendo 2171 contengano pur 4 volte le decine, e le unità del divisore 538, e seguendo l'operazione, come fu indicato nel Probl.

gener., cioè 5 centinaja quante volte contengonsi in 21 centinaja? e perchè 5 vi si contiene 4 volte, e resta 1 centinajo, il quale convertito in decine, ed aggiunto ad esse 7 decine, si domandi se il 3 entri 4 volte in 17 decine, e siccome 4 vi cape, e vi resta 5, si converte questo in unità, che fanno 50, alle quali aggiunto 1, fanno 51; ed osservando che la cifra 8 delle unità cape in 51 non solo 4 volte, ma sibbene 6, si rimane sicuro che 4 sia il quoto di 2171 per 538. Scrivo dunque 4 sotto al divisore. Moltiplico 538 per 4; e siccome il prodotto è 2152, il quale è minore di 2171, conchiudo essere vero il quoto 4. Scrivo perciò 2152 sotto del primo dividendo, e lo sottraggo da esso, il residuo è 19 migliaja.

A lato del 19 io abbasso le 6 centinaja del dividendo, ed ho 196 centinaja per secondo dividendo parziale, che diviso per 538, non può dare centinaja al quoto; scrivo dunque 0 sotto la linea del divisore, per esprimere che il quoziente non contiene centinaja.

A destra di 196 abbasso le 8 decine del dividendo, ed ho in tal modo 1968 decine per terzo dividendo parziale; chieggo dunque il numero delle volte che il divisore 538 si comprende in questo terzo dividendo, e trovo col metodo di quasi sù essere 3 il numero cercato. Scrivo dunque 3 al quoziente, e moltiplicandolo pel divisore 538, noto il prodotto 1614 sotto del terzo dividendo 1968, e sottrattolo da esso, rimane 354 decine di residuo.

A lato di 354 abbasso le 4 unità del dividen-

do, ed ho 3544 unità per quarto dividendo parziale, e dico quante volte 538 cape in 3544, ovvero 5 in 35? Vi cape 7 volte. Pare a prima vista che 7 sia la terza cifra del quoziente, ma osservando che le decine, e le unità del dividendo non contengono 7 volte anche le decine, e le unità del divisore 538, conchiudo, dietro il saggio indicato sopra, che invece di 7 debba scrivere 6, al più, al quoziente, e sarò sicuro essere 9 effettivamente, se posso sottrarre il prodotto di 6 per 538 dal dividendo 3544. Ora io trovo che un tal prodotto è 3228, il quale è minore di 3544, lo sottraggo, ed ho di residuo 316, il quale non essendo più divisibile per 538, dal non potersi abbassare altre cifre del dividendo, per essersi tutte successivamente abbassate, si arresterà l'operazione, e si aggiungerà al quoziente la frazione $\frac{316}{538}$.

Adunque il numero 4036 non è quoziente esatto di 2171684 per 538.

La dimostrazione della giusta risoluzione del problema si rileva dall'essersi presi i parziali quoti delle unità di diverso ordine sistenti nel dividendo, e formato con essi il quoto totale. C. B. F., e D.

43. *Corol.* Degli esempj esposti si vede che l'arte della divisione de' numeri espressi da molte cifre consiste a dividere il dividendo totale in molti dividendi particolari, che siano divisibili dal divisore, e poi scrivere in una linea i quoti parziali, finchè si abbia un quoziente totale, il quale sarà composto di tante cifre, quanti sono i dividenti parziali.

ESEMPIO II.

Dividere 9639475 *per* 2789

```
Dividendo 9639475 } 2789
          8367    } ---------------
                    3456+691  quoto
          -----          2789
          12724
          11156
          -----
          015687
           13945
          ------
          017425
           16734
          ------
          00691
```

Disposti al solito il dividendo, e 'l divisore, comincio a dire quante volte 9639 contiene il divisore 2789, ovvero quante volte il 9 contiene 2? Lo contiene 4 volte: a fin di essere sicuro se sia 4, o altro minore; supposto il 4, io lo moltiplico per 2, e 'l prodotto 8, senza scriverlo, ma colla mente lo sottraggo dal 9, ed ho 1 di residuo: questo unito alla cifra 6, fa 16, dico poi 7 in 16 cape puranche 4 volte? ovvero, che è lo stesso, moltiplico 4 per 7, che fa 28, il quale essendo maggiore di 16, conchiudo che il quoto 4 additato è troppo grande, onde lasciando il 4, mi appiglio al 3, che sottometto allo stesso saggio, di-

cendo 3 moltiplicato per 2 fa 6, tolto dal 9, resta 3, che unito al 6 del dividendo, fa 36, e saggiando se il 7 si comprenda 3 volte in 36, o pure il 7 moltiplicato per 3 produce 21, il quale sottratto da 36, dà un gran residuo, resto perciò assicurato che 3 sia il quoto da scriversi. Scrivo dunque il 3, e moltiplicatolo pel divisore 2789, ne sottraggo il prodotto dal primo dividendo 9639, ma senza scrivere il prodotto, fo a mente la sottrazione, dicendo 3 volte 9 fanno 27, tolto da 9 del dividendo, non si può, aggiungo al 9 2 decine, e si ha 29: dico perciò, da 29 tolto 27, resta 2; scrivo 2 sotto il 9. Ora le due decine sono state improntate dalla cifra precedente 3, ond' ella si è ridotta ad 1, ovvero, ciò che è più comodo in pratica, e ritorna allo stesso, ritengo le due decine per unirle al prodotto delle decine del divisore pel quoziente, e sottrarre il tutto dalle decine del dividendo prese in loro totalità. Prosieguo dunque, e dico 3 volte 8 fanno 24, e 2 di ritenuta, fanno 26, il 26 da 3 non può sottrarsi, aggiungo 3 centinaja prese da quelle del dividendo, ed ho 33, da cui tolto 26, resta 7, che scrivo sotto il 3.

Ritengo 3 centinaja per unirle alle centinaja del terzo prodotto, che devono essere sottratte dalle centinaja del dividendo. Dico perciò 3 volte 7 fanno 21, e 'l 3 di residuo fanno 24: 24 da 6 non può sottrarsi, aumento il 6 di 2 mila, ciò che mi dà 26, da cui tolgo 24, e 'l resto 2 scrivo sotto il 6.

Finalmente moltiplico la cifra 2 del divisore per 3, e'l prodotto 6, al quale aggiunto 2 per lo

impronto supposto per la sottrazione precedente, la somma è 8, che essendo tolta da 9, dà 1 per resta.

Tutte queste operazioni mostrano, che dopo di aver sottratto dal dividendo 9639 il prodotto del divisore 2789 per 3, il residuo è 1272 mila.

A fianco di questo residuo abbasso le 4 centinaja del dividendo, ed ho 12724 per secondo dividendo parziale, e dico il 2 quante volte cape in 12? vi cape 6 volte; ma si vede chiaro che 6 è troppo grande per lo quoto; perciocchè 724 unità del dividendo parziale, lungi di contenere 6 volte le 789 unità del divisore, non le contengono neppure una volta. Laonde bisogna provare di seguito il numero 5, dicendo 5 volte 2 fanno 10; 10 da 12, resta 2, che con 7 seguente del dividendo parziale fanno 27; 5 volte 7 fanno 35; 35 da 27 non può sottrarsi, il 5 è dunque troppo grande. Si proverà perciò 4, dicendo 4 volte 2 fanno 8, da 12, il resto è 4, e come questo resto dà un quoziente più grande, conchiudo, come sopra, che la cifra 4 è propria ad essere scritta al quoziente. Ciò fatto si moltiplichi 4 per lo divisore 2789, e si sottragga dal dividendo 12724, come si è operato per l'altro, troverassi 1568 centinaja di residuo.

A lato di questo residuo metto la cifre 7 delle decine del dividendo, ed avrò il terzo dividendo parziale 15687 decine. Per trovare la terza cifra del quoziente, dico quante volte 2 si contiene in 15? si contiene 7 volte, ma saggiando la cifra 7

col moltiplicarla per 2, si ha 14, che tolto da 15, da 1, al quale aggiunto 6, fa 16: il 7 in 16 non vi va che 2 volte. Dunque 7 non è buono. Suppongasi 6, e moltiplico 6 per 2, fa 12, che sottratto da 15, da 3 di resta, aggiunto ad esso il 6 fa 36, dico poi il 7 delle centinaja del divisore comprendonsi pur 6 volte in 36? trovo che no. Lascio perciò il 6, e mi appiglio al 5, per saggiarlo, lo moltiplico per 2 del dividendo, e fa 10, tolto da 15 dà di resta 5, unisco al 5 il 6 del dividendo, ed ho 56, il 7 in 56 non men 5, ma 8 volte vi entra. Conchiudo essere buono 5 per essere scritto al quoto. Lo scrivo, e poi lo moltiplico pel divisore 2789, e sottraggo il lor prodotto dal dividendo 15687, ed avrò il residuo 1742 decine.

Finalmente a fianco di questo residuo situo la cifra 5 delle unità del dividendo, avrò così un quarto dividendo parziale 17425 unità. Dirò dunque 2 quante volte cape in 17? vi va 8 volte; ma usanda la pruova di sopra, trovo che sì l'8, che il 7 è troppo grande: metterò dunque 6 al quoziente; e moltiplicatolo per lo divisore 2789, sottraggo come sopra, il prodotto dal dividendo 17425, ed ottengo per ultimo residuo 691, scrivo al quoto la frazione nascente $\frac{691}{2789}$, che con l'intero 3456 formerà il quoto totale.

Ecco un'altro esempio di divisione, nel quale si veggono soltanto i risultati delle operazioni.

Esempio II.

Dividere 956784567 *per* 15784

```
Dividendo 956784567 | 15784 Divisore
          94704     |------------------
          -----     | 60617 + 5839/15784 Quoziente
           0097445  |
             94704  |
           -------
            027416
             15784
           -------
            116327
            110488
           -------
            005839
```

37. *Corol.* Dalla natura della divisione segue che se il dividendo divenisse doppio, e 'l divisore rimanesse lo stesso, il quoto sarebbe doppio, se triplo, triplo, se quadruplo, quadruplo, se multiplo, multiplo, quoto si avrebbe, il che torna allo stesso, che moltiplicandosi il dividendo per 2, per 3, 4 ec., il quoto si moltiplicherebbe per 2, per 3, per 4, ec. perchè un dividendo 2 volte, 3 volte, 4 volte ec. maggiore deve contenere due volte 3 volte, 4 volte, ec. di più il divisore; così pure se il dividendo si divide per 2, 3, 4, ec., si avrà la metà, la terza, la quarta parte del quoto, ec., perchè il divisore si contiene 2 volte, 3, 4, ec., volte meno nel dividendo. Laonde il quoto cresce, o decresce, secondocchè cresce, o decresce il dividendo.

ESEMPIO

Sia da dividersi 8 per 2, fatta la divisione, si avrà 4 per quoto. Ora se si moltiplichi il dividendo 8 per 2, il nuovo dividendo sarà 16, che diviso per 2 dà 8 per quoto, il quale è doppio di 4, e così se si fosse moltiplicato per 3, 4, ec., il quoto sarebbe triplo, quadruplo, ec. Così pure se si divida il dividendo 8 per 2, diverrà 2 il quoto, metà del primo 4, e così di seguito.

38. Al contrario, se restando il dividendo lo stesso, ed il divisore si moltiplichi per 2, 3, 4, ec. o sia divenga doppio, triplo, quadruplo, ec. in tal caso il quoto sarà metà, terza parte, quarta parte, ec. del quoto primo, appunto perchè il divisore doppio, triplo, quadruplo, ec. cape 2 volte, 3 volte, quattro volte meno nel dividendo: e se il divisore si divida per 2, 3, 4, ec., il quoto diviene doppio, triplo, quadruplo, ec. perchè il divisore 2 volte, tre volte, quattro volte, ec. minore cape doppio, quadruplo numero di più nel dividendo.

Esempio. Sia 48 da dividersi per 4. Il quoto sarà 12. Ora se si moltiplichi il 4 per 2, 3, 4, ec., il divisore divenendo 8, 12, 16, il quoto sarà 6, 4, 3, numeri, ch' esprimono la metà, la terza, la quarta parte del primo quoto 12. Se viceversà si divida il 4 per 2, o per 4 il quoto diverrà 24, 48, doppj, quadrupli del primo quoto 12.

39. *Cor.* Per la qual cosa, moltiplicando, o di-

videndo per lo stesso numero, tanto il dividendo, che il divisore, il quoto rimane lo stesso, perciocchè, colla moltiplicazione del dividendo per un dato numero, cresce il quoto, e colla moltiplicazione del divisore per lo stesso numero, decresce il quoto similmente. Perciò rimane invariato. Lo stesso vale, quando si divide nel tempo stesso, sì il dividendo, che il divisore. Nei quali casi, quanto cresce, o decresce il dividendo, tanto cresce, o decresce il divisore.

ESEMPIO.

Si abbia a dividere 16 per 4, si avrà 4 per quoto. Si moltiplichi ora tanto 16, che 4 per 2, si ha 32 per dividendo, 8 per divisore; fatta la divisione, si ha 4 per quoto, eguale a quel 4. Si divida 16 per 2, e si avrà 8, e 'l 4 per 2, si avrà 2. Diviso 8 per 2. Si ha 4, che è lo stesso quoto. Così pure se si moltiplichino il 16, e 'l 4 per qualunque altro numero, o si dividano.

40 *Corol.* Quindi sorge un metodo di abbreviare il più delle volte le operazioni delle divisioni, e farle all'istante. Questo avviene quando si ravvisa essere tanto il dividendo, che il divisore divisibile per un certo numero, perchè allora eseguendo tale operazione, sì l'uno, che l'altro si riducono a numeri minori, e tra questi è facile percepire in un subito il quoto. Questo specialmente si osserva nelle divisioni, ove sì il dividendo, che il divisore siano espressi in fattori, dà quali otterrassi speditamente il quoto, cassando i fattori comuni al dividendo, ed al divisore.

ESEMPIO

Sia il prodotto de' fattori $4\times5\times8$ da dividersi per $2\times3\times5\times4$. Si otterrà il quoto con più facilità, togliendo dal dividendo, e dal divisore i fattori 4, e 5; onde rimane nel dividendo 18, e nel divisore 6 il quale da per quoto 3.

Così pure $8\times10\times100\times1000$ diviso per $4\times100\times1000$, tolti i fattori comuni 4, 100, 1000, si avrà 2×10, che fa 20, e sarà il quoto addimandato. Ciò che risparmia le successive moltiplicazioni di que' fattori, e poi la divisione dell' un prodotto per l' altro.

41 *Scol.* E poichè abbiamo mostrato (n.° 28) che se ad una cifra si aggiunga 0, essa resta moltiplicata per 10, se 00, resta moltiplicata per 100, e se 000, per mille, e così di seguito. Del pari se si cassi un zero a destra, il numero rimane la decima del numero primiero, ovvero resta diviso per 10, se si tolgano due zeri, rimane diviso per 100, se tre zeri, resta diviso per 1000. Quindi segue, che se si voglia il quoto di una divisione, in cui si il dividendo, che il divisore sia terminato da zeri, si otterrà più facilmente il quoto, cassando egual numero di zeri dall' uno e dall' altro.

ESEMPIO

Dividere 6400000 *per* 32000

Si sopprimano tre zeri nel dividendo, e nel divisore, e si ridurranno a 6400, e 32. Si faccia poi la divisione tra 6400, e 32, e si otterrà per quoto 200. Ove vuole avvertirsi, che quando il dividendo abbia cifre significative di unità, decine, centinaja, ec., e siano ad esse congiunti più zeri, in tal caso, se le cifre significative siano esattamente divisibili pel divisore, si esegua la divisione prendendo per dividendo le sole cifre significative, ed al quoto di queste si aggiungano tutti i zeri del dividendo, e si avrà il quoto totale. Ciò si vede chiaro nel caso addotto, ove il divisore 32 cape esattamente nel 64, cifre significative del dividendo 6400, ed al quoto 2 si sono posti due zeri, ond'è divenuto 200. Infatti 32 cape 200 volte in 6400.

42. Venghiamo ora a qualche applicazione della divisione.

Probl. Ridurre a docati 456784 calli

E poichè il grano è composto di 12 calli, sarà il carlino 120 calli, il che si ha moltiplicando 12 per 10, e 'l docato ne conterrà 1200. Ora dividendo 456784 calli per 1200, si ottiene per quoto $380 + \frac{784}{1200}$, il che si esegue, come al solito.

Dividendo 456784	1200 Divisore
3600	
09678	$380 + \frac{784}{1200}$ quoto
9600	
00784	

Qui il quoto esprime docati, quantunque il dividendo esprima calli. Perchè se si consideri che il divisore 1200 esprime un docato, e comprendendosi esso nel dividendo 456784 380 volte con un fratto, vuol dire che anche il dividendo esprime un moltiplice di 1200, cioè docati, e perciò esprime docati C. B. F.

Probl. Per comprare 484 cantaja di zuccaro si sono spesi 13552 docati, si vuol sapere il costo di un sol cantajo?

Si divida 13552 per 484 al solito, il quoto esprimerà il prezzo di un cantajo.

Dividendo 13552	484 Divisore
968	28 quoto
3872	3872
3872	968
0	13552

Il quoto dunque è docati 28.

43 *Scol.* È d'avvertirsi finalmente che componendosi il dividendo dal divisore moltiplicato pel quoziente, si ha un mezzo a provare se siasi bene eseguita la divisione, col moltiplicare il quoto totale pel divisore, ed aggiungervi il residuo del dividendo, se ve ne sia, e vedere se il tutto pareggi il dividendo. Il che ho eseguito in questo esempio col moltiplicare il quoto 28 pel divisore 484, ed essendo sorto il dividendo 13552, mi sono assicurato essere state bene eseguite le operazioni.

CAPITOLO VI.

DE' FRATTI.

44. Se l'unità che compone i numeri dinotata dalla cifra 1 s'intenda divisa in più parti uguali, una, due, tre, ec. di queste parti si appella *fra-*

zione, o *fratto*. Ad indicarlo si fa uso di una linea orizzontale, sotto di cui si scrive un numero, che disegna il numero delle parti, in cui dividesi l' unità principale, e sopra si pone un altro numero, che indica il numero delle parti che si prendono. Al numero superiore si dà il nome di *numeratore*, al numero inferiore quello di *denominatore*. In generale que' numeri chiamansi termini della frazione. Così l' espressione numerica $\frac{3}{4}$, tre quarti, indica una frazione, o sia una porzione dell' unità, ove il 4 esprime l' unità divisa in 4 parti, il 3 disegna quante di esse parti si prendono. Il 3 chiamasi *numeratore*, ed il 4 *denominatore*. Sono pure frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$ ec.

45 La frazione è o *astratta*, o *concreta*, *astratta* quando si riferisce a numeri *astratti*, *concreta*, se a numeri *concreti* si riporta.

46 *Teor.* Ogni frazione è una divisione, il cui numeratore è il dividendo, il denominatore è il divisore. Che ciò sia vero, sia per esempio $\frac{4}{5}$ una frazione. Il suo valore è sempre lo stesso, o che si divida l'unità del 4 in 5 parti, e se ne prendano poi 4, o che il numeratore 4 si divida in 5 parti semplicemente, e se ne prenda il quoto. Imperocchè suppongasi delle 4 unità del numeratore ciascuna divisa in cinque parti, saranno coteste parti 20 quinte. Ora dividendo il 20 per 5, si ha 4 per quoto, le quali sono quinte parti, perchè di quinte si parla. Ma in questo caso il 20 fa da dividendo, e 'l 5 da divi-

sore, dunque il fratto è sempre una divisione il cui dividendo è il numeratore, e'l divisore è il denominatore.

Adunque una divisione può indicarsi per mezzo di una frazione, il cui dividendo è il numeratore, e'l divisore il denominatore. C. B. D.

Esemp. Sia la frazione $\frac{8}{15}$ otto quindicesimi, essa può esprimersi così, 8 diviso per 15. E siccome la natura della divisione porta che il divisore debba contenersi nel dividendo, avviene che non sempre vi si contenga, per essere il divisore maggiore del dividendo. In tal caso la divisione si indica con una frazione, il cui dividendo faccia da numeratore, e'l divisore faccia da denominatore. Il fratto in tal caso chiamasi *vero*, o *genuino*, per essere in realtà un quoto minore dell' unità. Che se poi il divisore si comprende nel dividendo, o ad altri piaccia esprimere la divisione con un fratto, allora esso fratto si dirà *spurio*, perchè esprime un quoto maggiore dell' unità, o anche l'unità. Tali sono i fratti $\frac{28}{9}$, $\frac{3}{3}$, il primo de' quali esprime un quoto di 3 interi, ed $\frac{1}{9}$, il secondo è uguale ad 1, quali quoti si ottengono facendo le divisioni indicate, nel primo dividendo 28 per 9, il che deve farsi ne' fratti spurj quando si vuole il quoto, nel secondo 3 per 3.

48. *Scol.* Il mezzo dunque da distinguere il fratto

vero dallo spurio si è di osservare si il numeratore, che il denominatore, se il primo è minore del secondo, il fratto sarà vero, se il primo è uguale, o maggiore del secondo, sarà spurio. Tali sono i seguenti.

FRATTI VERI *FRATTI SPURJ*

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{15}{35} \quad \frac{20}{42} \qquad \frac{45}{9} \quad \frac{17}{6} \quad \frac{488}{92} \quad \frac{28}{28}$$

49. *Scolio.* Trattando della divisione abbiamo osservato che il quoto è relativo al dividendo, ed al divisore, cosicchè variando questi, varia quello. Lo stesso è delle frazioni, poichè queste non sono, che quoti della divisione del numeratore per lo denominatore. Laonde non è fuori di proposito ripigliare i ragionamenti fatti (n.° 37, e seg.), ed applicarli a' fratti colle seguenti deduzioni.

Primieramente se il numeratore sia un numero qualunque, e 'l denominatore 1, il quoto sarà uguale al numeratore. Così $\frac{54}{1}$ è uguale a 54, $\frac{79}{1}$ è uguale a 79. La ragione si è che l' unità, che è il divisore, cape nel 54, 54 volte, nel 79, 79 volte, e così degli altri. Perciò segue. *Ogni numero, a cui si appone 1 per denominatore, ovvero divisore, non rimane diviso, e perciò non muta il suo valore.*

2.° Se si moltiplichi il numeratore di una frazione, ella cresce di valore, e diverrà doppia, se si

milmente moltiplicando per 3, 4, 5 ec. Onde segue.

Non si muta il valore di un fratto, moltiplicando sì il numeratore, che il denominatore per lo stesso numero.

7.° Finalmente se si divida, sì il numeratore, che il denominatore per lo stesso numero, la frazione non cambia il valore. Sia la frazione $\frac{2}{6}$, e si divida sopra, e sotto pe 2, si avrà $\frac{1}{3}$, la quale è uguale a $\frac{2}{6}$. Ciò si comprende (n.° 39). Onde segue.

Non si muta il valore di un fratto, dividendo sì il numeratore, che il denominatore per un numero qualunque.

50. *Scol.* Volendosi ridurre un numero intero a frazione, che abbia un dato numero per denominatore; bisognerà moltiplicare il dato numero per quel denominatore, e poi moltiplicare il denominatore 1 dell'intero pel denominatore stesso, ciò facendo si otterrà sempre lo stesso numero. Sia per esempio 8, e si voglia convertire in fratto, che abbia 9 per denominatore: si scriva 1 sotto l' 8, e poi si moltiplichi sì 8, che 1 per 9, si avrà $\frac{72}{1\times9}=\frac{72}{9}$. Ciò è chiaro (n.° 39), non alterandosi il valore di un fratto, moltiplicando sì il numeratore, che il denominatore. Oppure per le contrarie ope-

razioni che si eseguono coll' 8, il quale aumentandosi il noncuplo colla moltiplicazione di 9, e colla divisione del 9 un tal noncuplo si diminuisce di 9, perciò rimaue 8, come si vede dividendo 72 per 9, che produce 8, che è il numero dato di prima.

Posti cotesti principj, discendiamo ora al calcolo de' fratti.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

51 Allorchè vogliasi paragonare una frazione con un' altra per valutare la loro grandezza relativa, aggiunger l' una all' altra, o sottrar l' una dall' altra, fa d' uopo che esse siano riferite non solo alla stessa unità, ma ciascuna esponga l'unità divisa nello stesso numero di parti, ovvero che abbiano lo stesso denominatore. Da ciò nasce la necessità di avere le frazioni del medesimo denominatore; ma come il più delle volte esse l' han diverso, è d' uopo perciò ridurle ad un solo. Per la qual cosa qui esporremo il modo, onde ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

52. *Probl. Siano date delle frazioni, fa d'uopo ridurle allo stesso donominatore.*

Si moltiplichi ciascun numeratore pel prodotto di tutti gli altri denominatori, eccettuato il suo, e poi si scrivano, uno ad uno questi prodotti, i quali saranno tanti di numero quanti sono i numeratori de' fratti dati. Di poi si moltiplichino tutti i denominatori, e si scriva il prodotto loro sotto ciascun di quei prodotti. Saranno le frazioni ridotte

ESEMPIO

Dividere 6400000 *per* 32000

Si sopprimano tre zeri nel dividendo, e nel divisore, e si ridurranno a 6400, e 32. Si faccia poi la divisione tra 6400, e 32, e si otterrà per quoto 200. Ove vuole avvertirsi, che quando il dividendo abbia cifre significative di unità, decine, centinaja, ec., e siano ad esse congiunti più zeri, in tal caso, se le cifre significative siano esattamente divisibili pel divisore, si esegua la divisione prendendo per dividendo le sole cifre significative, ed al quoto di queste si aggiungano tutti i zeri del dividendo, e si avrà il quoto totale. Ciò si vede chiaro nel caso addotto, ove il divisore 32 cape esattamente nel 64, cifre significative del dividendo 6400, ed al quoto 2 si sono posti due zeri, ond'è divenuto 200. Infatti 32 cape 200 volte in 6400.

42. Venghiamo ora a qualche applicazione della divisione.

Probl. Ridurre a docati 456784 calli

E poichè il grano è composto di 12 calli, sarà il carlino 120 calli, il che si ha moltiplicando 12 per 10, e 'l docato ne conterrà 1200. Ora dividendo 456784 calli per 1200, si ottiene per quoto $380 + \frac{784}{1200}$, il che si esegue, come al solito.

Dividendo 456784	1200 Divisore
3600	
09678	$380 + \frac{784}{1200}$ quoto
9600	
00784	

Qui il quoto esprime docati, quantunque il dividendo esprima calli. Perchè se si consideri che il divisore 1200 esprime un docato, e comprendendosi esso nel dividendo 456784 380 volte con un fratto, vuol dire che anche il dividendo esprime un moltiplice di 1200, cioè docati, e perciò esprime docati C. B. F.

Probl. Per comprare 484 cantaja di zuccaro si sono spesi 13552 docati, si vuol sapere il costo di un sol cantajo?

Si divida 13552 per 484 al solito, il quoto esprimerà il prezzo di un cantajo.

Dividendo 13552	484 Divisore
968	28 quoto
3872	3872
3872	968
0	13552

Il quoto dunque è docati 28.

43 *Scol.* È d'avvertirsifinalmente che componendosi il dividendo dal divisore moltiplicato pel quoziente, si ha un mezzo a provare se siasi bene eseguita la divisione, col moltiplicare il quoto totale pel divisore, ed aggiungervi il residuo del dividendo, se ve ne sia, e vedere se il tutto pareggi il dividendo. Il che ho eseguito in questo esempio col moltiplicare il quoto 28 pel divisore 484, ed essendo sorto il dividendo 13552, mi sono assicurato essere state bene eseguite le operazioni.

CAPITOLO VI.

DE' FRATTI.

44. Se l'unità che compone i numeri dinotata dalla cifra 1 s'intenda divisa in più parti uguali, una, due, tre, ec. di queste parti si appella *fra-*

zione, o *fratto*. Ad indicarlo si fa uso di una linea orizzontale, sotto di cui si scrive un numero, che disegna il numero delle parti, in cui dividesi l'unità principale, e sopra si pone un altro numero, che indica il numero delle parti che si prendono. Al numero superiore si dà il nome di *numeratore*, al numero inferiore quello di *denominatore*. In generale que' numeri chiamansi termini della frazione. Così l'espressione numerica $\frac{3}{4}$, tre quarti, indica una frazione, o sia una porzione dell'unità, ove il 4 esprime l'unità divisa in 4 parti, il 3 disegna quante di esse parti si prendono. Il 3 chiamasi *numeratore*, ed il 4 *denominatore*. Sono pure frazioni $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{8}{11}$ ec.

45 La frazione è o *astratta*, o *concreta*, *astratta* quando si riferisce a numeri *astratti*, *concreta*, se a numeri *concreti* si riporta.

46 *Teor*. Ogni frazione è una divisione, il cui numeratore è il dividendo, il denominatore è il divisore. Che ciò sia vero, sia per esempio $\frac{4}{5}$ una frazione. Il suo valore è sempre lo stesso, o che si divida l'unità del 4 in 5 parti, e se ne prendano poi 4, o che il numeratore 4 si divida in 5 parti semplicemente, e se ne prenda il quoto. Imperocchè suppongasi delle 4 unità del numeratore ciascuna divisa in cinque parti, saranno coteste parti 20 quinte. Ora dividendo il 20 per 5, si ha 4 per quoto, le quali sono quinte parti, perchè di quinte si parla. Ma in questo caso il 20 fa da dividendo, e 'l 5 da divi-

sore, dunque il fratto è sempre una divisione il cui dividendo è il numeratore, e 'l divisore è il denominatore.

Adunque una divisione può indicarsi per mezzo di una frazione, il cui dividendo è il numeratore, e 'l divisore il denominatore. C. B. D.

Esemp. Sia la frazione $\frac{8}{15}$ otto quindicesimi, essa può esprimersi così, 8 diviso per 15. E siccome la natura della divisione porta che il divisore debba contenersi nel dividendo, avviene che non sempre vi si contenga, per essere il divisore maggiore del dividendo. In tal caso la divisione si indica con una frazione, il cui dividendo faccia da numeratore, e 'l divisore faccia da denominatore. Il fratto in tal caso chiamasi *vero*, o *genuino*, per essere in realtà un quoto minore dell' unità. Che se poi il divisore si comprende nel dividendo, e ad altri piaccia esprimere la divisione con un fratto, allora esso fratto si dirà *spurio*, perchè esprime un quoto maggiore dell' unità, o anche l' unità. Tali sono i fratti $\frac{28}{9}$, $\frac{3}{3}$, il primo de' quali esprime un quoto di 3 interi, ed $\frac{1}{9}$, il secondo è uguale ad 1, quali quoti si ottengono facendo le divisioni indicate, nel primo dividendo 28 per 9, il che deve farsi ne' fratti spurj quando si vuole il quoto, nel secondo 3 per 3.

48. *Scol.* Il mezzo dunque da distinguere il fratto

vero dallo spurio si è di osservare si il numeratore, che il denominatore, se il primo è minore del secondo, il fratto sarà vero, se il primo è uguale, o maggiore del secondo, sarà spurio. Tali sono i seguenti.

FRATTI VERI *FRATTI SPURJ*

$$\frac{3}{5}\quad\frac{7}{9}\quad\frac{15}{35}\quad\frac{20}{42}\qquad\frac{45}{9}\quad\frac{17}{6}\quad\frac{488}{92}\quad\frac{28}{28}$$

49. *Scolio*. Trattando della divisione abbiamo osservato che il quoto è relativo al dividendo, ed al divisore, cosicchè variando questi, varia quello. Lo stesso è delle frazioni, poichè queste non sono, che quoti della divisione del numeratore per lo denominatore. Laonde non è fuori di proposito ripigliare i ragionamenti fatti (n.° 37, e seg.), ed applicarli a' fratti colle seguenti deduzioni.

Primieramente se il numeratore sia un numero qualunque, e 'l denominatore 1, il quoto sarà uguale al numeratore. Così $\frac{54}{1}$ è uguale a 54, $\frac{79}{1}$ è uguale a 79. La ragione si è che l' unità, che è il divisore, cape nel 54, 54 volte, nel 79, 79 volte, e così degli altri. Perciò segue. *Ogni numero, a cui si appone 1 per denominatore, ovvero divisore, non rimane diviso, e perciò non muta il suo valore.*

2.° Se si moltiplichi il numeratore di una frazione, ella cresce di valore, e diverrà doppia, se si

moltiplichi per 2, tripla, se per 3, e così di seguito. Per esempio il numeratore del fratto $\frac{2}{3}$ si moltiplichi per 2, per 3, ec., diverrà $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{3}$, che sarà doppio triplo di $\frac{2}{3}$. Ciò si comprende chiaramente, perocchè in tal caso crescendo il dividendo, che è il numeratore, il quoto cresce anch'egli, come fu detto (n. 37); onde segue.

Una frazione diventa maggiore, se si moltiplichi il suo numeratore per un numero intero qualunque.

3.° Se si moltiplichi il denominatore, la frazione diminuisce, e diverrà metà della prima, se si moltiplichi per 2, terza parte, se per 3, quarta parte, se per 4, ec. Così la frazione $\frac{1}{3}$ diverrà $\frac{1}{6}$, che è metà di $\frac{1}{3}$, se si moltiplichi per 2, diverrà $\frac{1}{9}$, che è terza parte, se per 3, ec. Imperocchè, come fu detto (n.° 38) moltiplicando il divisore, che è il denominatore, il quoto si fa minore e 'l sarà nella ragione de' numeri che moltiplicano. Onde segue.

Una frazione si diminuisce, se si moltiplichi il suo denominatore per un numero intero.

4.° Se si divida il numeratore di una frazione, ella si diminuisce di valore, e diverrà metà, terza, quarta parte di essa, se il suo numeratore si divide per 2, 3, 4, ec. Per esempio sia la frazio-

ne $\frac{8}{9}$. Si divida il numeratore 8 per 2, poi per 4, ec. si otterrà $\frac{4}{9}$ metà di $\frac{8}{9}$, e poi $\frac{2}{9}$ quarta parte di $\frac{8}{9}$. Perchè se si divida il dividendo di una divisione, il quoto diviene minore, e ciò nella ragione del numero che divide. (n. 37) Onde segue.

Se si divida il numeratore di una frazione per un numero intero, ella diminuisce di valore.

5.° Se si divida il denominatore, la frazione diviene maggiore, e diverrà doppia, se si divide per 2, tripla, se per 3, ec. Sia la frazione $\frac{3}{12}$, e dividasi prima per 2 il denominatore, ella diverrà $\frac{3}{6}$: di poi per 3, e diverrà $\frac{3}{4}$, e poi per 4, e diverrà $\frac{3}{3}$: nel primo caso è doppia, nel secondo è tripla, nel terzo è quadrupla (n. 38). Onde segue.

Se dividasi il denominatore di una frazione per un numero intero, ella si aumenta.

6.° Se si moltiplichi nel tempo stesso sì il numeratore, che il denominatore di una frazione per un' istesso numero, essa rimane dello stesso valore. Sia la frazione $\frac{2}{3}$; e si moltiplichi sopra, e sotto per 2, si avrà $\frac{4}{6}$. Questa è uguale a $\frac{2}{3}$ (n.° 39). Si-

milmente moltiplicando per 3, 4, 5 ec. Onde segue.

Non si muta il valore di un fratto, moltiplicando si il numeratore, che il denominatore per lo stesso numero.

7.° Finalmente se si divida, si il numeratore, che il denominatore per lo stesso numero, la frazione non cambia il valore. Sia la frazione $\frac{2}{6}$, e si divida sopra, e sotto pe 2, si avrà $\frac{1}{3}$, la quale è uguale a $\frac{2}{6}$. Ciò si comprende (n.° 39). Onde segue.

Non si muta il valore di un fratto, dividendo si il numeratore, che il denominatore per un numero qualunque.

50. *Scol.* Volendosi ridurre un numero intero a frazione, che abbia un dato numero per denominatore; bisognerà moltiplicare il dato numero per quel denominatore, e poi moltiplicare il denominatore 1 dell'intero pel denominatore stesso, ciò facendo si otterrà sempre lo stesso numero. Sia per esempio 8, e si voglia convertire in fratto, che abbia 9 per denominatore: si scriva 1 sotto l' 8, e poi si moltiplichi si 8, che 1 per 9, si avrà $\frac{72}{1 \times 9} = \frac{72}{9}$. Ciò è chiaro (n.° 39), non alterandosi il valore di un fratto, moltiplicando si il numeratore, che il denominatore. Oppure per le contrarie ope-

razioni che si eseguono coll' 8, il quale aumentandosi il noncuplo colla moltiplicazione di 9, e colla divisione del 9 un tal noncuplo si diminuisce di 9, perciò rimane 8, come si vede dividendo 72 per 9, che produce 8, che è il numero dato di prima.

Posti cotesti principj, discendiamo ora al calcolo de' fratti.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

51 Allorchè vogliasi paragonare una frazione con un' altra per valutare la loro grandezza relativa, aggiunger l' una all' altra, o sottrar l' una dall' altra, fa d' uopo che esse siano riferite non solo alla stessa unità, ma ciascuna esponga l'unità divisa nello stesso numero di parti, ovvero che abbiano lo stesso denominatore. Da ciò nasce la necessità di avere le frazioni del medesimo denominatore; ma come il più delle volte esse l' han diverso, è d' uopo perciò ridurle ad un solo. Per la qual cosa qui esporremo il modo, onde ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

52. *Probl. Siano date delle frazioni, fa d'uopo ridurle allo stesso donominatore.*

Si moltiplichi ciascun numeratore pel prodotto di tutti gli altri denominatori, eccettuato il suo, e poi si scrivano, uno ad uno questi prodotti, i quali saranno tanti di numero quanti sono i numeratori de' fratti dati. Di poi si moltiplichino tutti i denominatori, e si scriva il prodotto loro sotto ciascun di quei prodotti. Saranno le frazioni ridotte

allo stesso denominatore, ed avrà ciascuna il valore della corrispondente già data.

ESEMPIO.

Siano le tre frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{9}$. Si moltiplichi il numeratore 5 del fratto $\frac{5}{6}$ pel prodotto di 7, e 9, e si avrà 315; di poi il 3 numeratore di $\frac{3}{7}$ per lo prodotto di 6, e 9, e si avrà 162: si moltiplichi inoltre 2 numeratore di $\frac{2}{9}$ per lo prodotto di 6 per 7, e si avrà 84. In fine si moltiplichino i tre denominatori 6,7,9, e 'l prodotto 378 si noti sotto ciascuno de' numeri 315, 162, 84, onde risultano i tre fratti $\frac{315}{378}$, $\frac{162}{378}$, $\frac{84}{378}$, de'quali il primo è uguale a $\frac{5}{6}$, il secondo a $\frac{3}{7}$, e 'l terzo a $\frac{2}{9}$. Imperciocchè con questo processo di operazioni, non si è fatto altro, che moltiplicare nella prima frazione si il 5, che il 6 pel prodotto di 7, e 9, che è 63, nella seconda si 3, che 7 pel prodotto di 6, e 9, che è 54, nella terza si il 2, che il 9 per lo prodotto di 6 per 7, che è 42, e (n.° 49. 6.°) si è dimostrato non mutarsi il valore del fratto col

moltiplicare sì il numeratore, che il denominatore per un' istesso numero; e ciò si è fatto nelle frazioni $\frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9}$; onde le risultanti $\frac{315}{378}, \frac{162}{378}, \frac{84}{378}$ sono eguali rispettivamente a quelle, ciascuna a ciascuna.

53 *Scol.* Alle volte si abbrevia la riduzione dei fratti allo stesso denominatore, ciò è quando i fratti dati hanno de'denominatori, i quali siano alcuni moltiplici di alcuni altri. In tal caso, se ambo i termini di ciascuna frazione si moltiplichino per l'altro fattore del denominatore moltiplice, si troveranno tutte le frazioni ridotte all' istesso denominatore, nè questo sarà più grande del massimo, il che se si facesse secondo il metodo esposto nel n.° precedente, nascerebbero numeri assai grandi.

ESEMPIO.

Siano i fratti $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{9}{24}$ da ridursi all' istesso denominatore, e 'l massimo de' dati sia 24 il quale è moltiplice di ciascuno di essi. Cominciando da $\frac{3}{4}$, si vede che il denominatore 4 cape 6 volte in 24, perciò si moltiplichino i termini di $\frac{3}{4}$ per lo 6, e si avrà $\frac{18}{24}$, così il 3 comprendendosi in 24 8 volte, si moltiplichino per 8 i ter-

mini di $\frac{2}{3}$, e si avrà $\frac{16}{24}$, e finalmente il 12 cape in 24 2 volte, onde moltiplicati i termini di $\frac{7}{12}$ per 2, si avrà $\frac{14}{24}$, e saranno così ridotti allo stesso denominatore, divenendo $\frac{18}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{14}{24}$, $\frac{9}{24}$, l'ultimo rimane invariato nel denominatore, essendosi ad esso ridotti gli altri.

54 *Scol.* Allorchè due frazioni sonosi ridotte allo stesso denominatore, è facile il paragonarle tra loro, per vedere se siano uguali, o disuguali. Perocchè riportandosi esse alla stessa unità, ed essendo queste espresioni di un dato numero di parti della unità, quella frazione sarà maggiore, uguale, o minore di un'altra, che contenga maggior numero, uguale, o minore di quelle parti. Così $\frac{5}{12}$, e $\frac{3}{12}$ sono disuguali, e la prima è maggiore della seconda, per essere il numeratore 5, che esprime il numero delle parti dell'unità divisa in 12, maggiore del numeratore 3, che esprime il numero delle parti della stessa unità divisa pure in 12 parti. Quindi segue, che per assicurarsi se due frazioni di diverso denominatore siano uguali, fa d'uopo ridurle all'istesso denominatore. In tal caso quella che ha numeratore maggiore, sarà maggiore. Così $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{7}$ non potendosi paragonare per la diversità

de' denominatori, si potranno, riducendoli allo stesso, onde saranno $\frac{21}{28}$, e $\frac{20}{28}$, e la prima essendo maggiore della seconda, vuol dire, che la sua uguale $\frac{3}{4}$ sia maggiore dell' altra $\frac{5}{7}$. Così pure, se si tratti di sommarle, o sottrarle tra loro, il che faremo qui appresso.

Addizione di fratti.

55 Trattando dell' addizione de'numeri interi abbiamo avvertito dover esser omogenei i numeri, cioè riferiti alla stessa unità. Lo stesso vale pe' fratti, i quali devono anch' essi riferirsi all' unità medesima Onde non potranno che questi aggiungersi fra loro. Ma oltre a ciò, essi non potranno addizionarsi, ancorchè siano omogenei, se non abbiano lo stesso denominatore, perchè se fossero di diverso denominatore, allora non si potrebbe avere un tutto risultante di parti uguali di una stessa unità. Come per esempio se uno voglia aggiungere i fratti $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$: per essere il primo di terze, il secondo di quarte parti composto, e le prime non sono eguali alle seconde, il tutto, che dovrebbe risultare di identiche parti congiunte, lo sarebbe di diverse.

56. *Probl. Dati de'fratti, aggiungerli insieme.* Potranno essi avere, o lo stesso denominatore, o

diverso. Se il primo, si uniscano tra loro tutti i numeratori in uno, e si scriva sotto il comun denominatore. Il fratto risultante sarà la somma di tutti. Se poi abbiano diverso denominatore, si riducano al medesimo denominatore, e si trovi, come prima la loro somma.

ESEMPIO I.

Siano $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{5}{9}$ da aggiungersi.

Questi siccome hanno lo stesso denominatore 9, così si uniscano i soli numeratori, che daranno la somma 10, ed apponendo sotto il comun denominatore 9, si avrà $\frac{10}{9}$, fratto spurio.

Imperciocchè essendo ne' tre fratti l'unità divisa nell'istesso numero di parti, dinotate dal denominatore 9, e di queste parti la prima frazione ne disegna 2, la seconda 3, la terza 5, unite queste, formeranno 10, ma esse sono nove parti, perciò la somma sarà $\frac{10}{9}$. C. B. F. D.

ESEMPIO II.

Siano i fratti $\frac{7}{9}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ da aggiungersi. Si riducano al medesimo denominatore, come i seguenti

$\frac{126}{162}+\frac{108}{162}+\frac{135}{162}$, ed unendo i loro numeratori, si avrà la somma espressa dal fratto spurio $\frac{369}{162}$, ed in ambo i casi, facendo la divisione del numeratore pel denominatore, si avrà per questo $2+\frac{45}{162}$, il che deve sempre farsi ne' fratti spurj, a fin di ricavare gl' interi, e le frazioni, che rimangono.

57 *Scol.* Avviene talora che debbasi aggiungere un fratto, o più ad un' intero, ed avere la somma in un fratto spurio. L' operazione è la stessa, se si scriva all' intero, per denominatore 1, il che non cambia il suo valore (n. 49. 1.°), e poi si riduca all' istesso denominatore de fratti, ed indi se ne ritrovi la somma.

ESEMPIO III.

Siano $\frac{8}{1}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$. Si scriva 1 sotto l' 8, e riducansi ai tre $\frac{192}{24}+\frac{20}{24}+\frac{18}{24}$, dello stesso denominatore: uniti insieme danno il fratto spurio $\frac{230}{24}$

Sottrazione de' rotti.

58 ***Probl.* Sottrare un fratto dall' altro omogeneo.**

Due casi accadono, i fratti dati o hanno lo stes-

so denominatore, o diverso. Se il primo, si sottragga dal maggior numeratore il minore, e 'l residuo si scriva per numeratore della frazione esprimente la differenza delle due date, e si apponga a tal numero il comun denominatore. Si avrà così il residuo.

ESEMPIO I.

Da $\frac{5}{9}$ vuol sottrarsi $\frac{3}{9}$. Avendo queste lo stesso denominatore 9, si tolga dal 5 il 3, ed al residuo 1 si sottoponga il comune denominatore 9. Sarà $\frac{2}{9}$ la differenza, o l' eccesso, ovvero il residuo di $\frac{5}{9}$ da $\frac{3}{9}$.

Se il secondo, si riducano al medesimo denominatore, poi dal maggiore numeratore si sottragga il minore, ed al residuo si apponga il comun denominatore.

ESEMPIO II.

Siano $\frac{8}{9}$, e $\frac{7}{8}$ due frazioni, e la seconda voglia sottrarsi dalla prima. Si riducano allo stesso denominatore, col solito medodo, onde abbiansi le due frazioni $\frac{64}{72}$, $\frac{63}{72}$, da 64 si tolga 63, si avrà 1

a cui si sottoponga il comun denominatore 72, sarà $\frac{1}{72}$ la differenza della prima dalla seconda, o il residuo.

La giustezza dell' operazione si rileva da ciò che si nel primo, che nel secondo esempio l'unità è divisa nello stesso numero di parti, come per esemp. in 9 nel I. esempio, dalle 5 voglionsi togliere le 3, resta $\frac{2}{9}$. Lo stesso raziocinio vale sul secondo esempio.

59 *Scolio.* Se vogliasi da un intero, con una, o più frazioni, togliere un' intero, con altre frazioni, l' operazione è la stessa, riducendo da una parte ad un sol fratto l' intero, ed i fratti, e similmente dall'altra, poi ridotti i fratti spurj allo stesso denominatore, si sottragga dal maggiore numeratore il minore, e si noti il residuo, col porvi il comun denominatore.

ESEMPIO

Siano $\frac{8}{1}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$, da' quali si vogliano sottrarre $\frac{7}{1}+\frac{7}{9}+\frac{1}{2}$. Si riducano i tre primi all' istesso denominatore, e così i secondi, onde si abbiano $\frac{120}{15}+\frac{12}{15}+\frac{10}{15}$ pei primi, $\frac{126}{18}+\frac{14}{18}+\frac{9}{18}$ pei secondi. Si aggiungano i primi, onde si

abbia la somma $\frac{142}{15}$, ed i secondi riducansi alla somma $\frac{159}{18}$. Indi ridotti allo stesso denominatore si abbiano $\frac{2556}{270}$, $\frac{2385}{270}$, che sottraendo il secondo dal primo, si avrà $\frac{171}{270}$.

Della moltiplicazione de' fratti.

60. La moltiplicazione de'fratti è affine alla moltiplicazione degli interi, poichè in quella degli interi si danno i fattori a moltiplicare, e si cerca un prodotto, che tante volte comprenda un di quelli, quante volte l' altro contiene l' unità, ovvero replicare un fattore tante volte, quante unità sono nell' altro, e prenderne la somma. In quella de' fratti l' apparenza mostra una diversità, ma se si voglia bene analizzare l' operazione, si troverà la moltiplicazione de' fratti esser del tutto simile a quella degl' interi. Per fissarne la giusta idea, fa duopo considerare, che nella moltiplicazione de' fratti vi sono due fattori, il moltiplicando cioè, e 'l moltiplicatore. Di questi uno può essere intero, l' altro fratto. Perciò due casi debbonsi considerare, e che si contengono nel seguente.

61 *Probl. Moltiplicare insieme un intero per un fratto, o un fratto per un altro fratto.*

I. Caso allorchè un fattore, è un intero.

Sia il numero 4, che voglia moltiplicarsi per $\frac{2}{3}$. Ad ottenere il prodotto, si moltiplichi l'intero 4 per lo numeratore 2 del fratto, e si ottiene 8. Si divida poi cotesto 8 per lo denominatore 3, onde si abbia $\frac{8}{3}$. Sarà questo il prodotto di 4 per $\frac{2}{3}$. Imperciocchè il prodotto di 4 per $\frac{2}{3}$ può avere due sensi, o potrà prendersi in quello di 4 moltiplicato per $\frac{2}{3}$, o per l'altro di $\frac{2}{3}$ moltiplicato per 4, non può restringersi a quello di 4 per 2, perchè in tal caso sarebbe 8, ma siccome il 2 ha un divisore 3, così devesi il prodotto 8 dividersi per 3, e si ha $\frac{8}{3}$ Se nel primo si comprende dal già detto. Se nel secondo egli è chiaro che $\frac{2}{3}$ moltiplicato per 4 vale lo stesso, che ripetere il $\frac{2}{3}$ quattro volte, o sia quaduplicarlo, il che da $\frac{8}{3}$, al che fare bisogna moltiplicare per 4 il numeratore 2. (n.° 49, 2.°)

62 *Corol.* 1. Dalla risoluzione di questo caso segue che moltiplicare un'intero per un fratto, non è altro che dividere l'intero in parti dinotate dal denominatore del fratto, e poi moltiplicarle tutte

pel numeratore del fratto, ovvero prendere dell'intero la parte dinotata dal fratto. Così nell'esempio addotto, moltiplicare $\frac{2}{3}$ per 4 è appunto dividere il 4 per 3, onde sorge $\frac{4}{3}$, e poi moltipicarlo per 2, quindi si ha $\frac{8}{3}$, come prima, ovvero prendere $\frac{2}{3}$ parti del 4, che ridotto in terze, darà 12 terze, e delle 12 prenderne $\frac{2}{3}$, che sono $\frac{8}{3}$.

63 *Corol.* II Da ciò rimane risoluto il paradosso de' tironi, i quali si sorprendono al vedere il prodotto di un'intero per un fratto risultare minore dell'intero, essendo pur troppo naturale, che il prodotto sia minore, dovendosi l'intero ripetere non per un'intero, ma prendere da esso una parte dinotata dal fratto moltiplicatore.

II. Caso, allorchè i fattori sono ambo fratti. Sia il fratto $\frac{4}{5}$ da moltiplicarsi per $\frac{2}{3}$. Per avere il loro prodotto fia d'uopo moltiplicare i loro numeratori 4, e 2 da una parte, dall'altra i denominatori 5, e 3, e si faccia un'altra frazione, che abbia per numeratore il prodotto di quei numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori, cioè $\frac{8}{15}$, questo fratto sarà il prodotto

di $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$. La ragione desumersi dal numero precedente. Imperciocchè moltiplicare $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ è lo stesso che prendere due terze parti del $\frac{4}{5}$. Ora per prendere $\frac{2}{3}$ parti del $\frac{4}{5}$, bisogna ridurre il $\frac{4}{5}$ alla sua terza parte, e poi moltiplicarlo per 2. Ma per ridurre a terza parte un fratto, è necessario moltiplicare, per 3 il denominatore (n.° 49. 3.°): adunque si moltiplichi il 5 per 3, e poi il numeratore 4 per 2, e si avrà $\frac{8}{15}$ per lo prodotto di $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$. Perciò ricavasi la seguente regola per la moltiplicazione di un fratto per un'altro

Regola. Si moltiplichino fra loro i numeratori, e'l prodotto scrivasi, come numeratore del prodotto de' fratti. Di poi si moltiplichino i denominatori, e si sottoscriva il prodotto a quello. Il nuovo fratto, che è il fratto composto, esprimerà il prodotto de' fratti dati.

64 *Scolio.* Se si abbiano a moltiplicare intero con rotti per altro intero con rotti, si ridurrà l'intero col rotto allo stesso denominatore, e si formerà un fratto spurio per lo moltiplicando, e così si

pratichi per lo moltiplicatore, e poi si eseguirà l' operazione, come ne' fratti semplici.

ESEMPIO. *Si vogliano moltiplicare* $34+\frac{2}{3}$ per $29+\frac{3}{5}$.

Si riduca $34+\frac{2}{3}$ al fratto spurio $\frac{104}{3}$ (n.° 50) e $29+\frac{3}{5}$ a $\frac{148}{5}$. Indi si moltiplichino i due fratti, cioè $\frac{104}{3}\times\frac{148}{5}=\frac{15392}{15}$, la quale ultima frazione spuria è il prodotto richiesto.

65 *Coroll.* Da qui sorgono quelle espressioni, che fratti di fratti si appellano. Essi in nulla differiscono dal prodotto di due fratti, e l' avere quelli non è diverso dall' ottenere questo. Di fatti quando altri voglia moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$ (n.° 63) si è rilevato essere lo stesso, che prendere $\frac{2}{5}$ parti del $\frac{3}{4}$, il cui prodotto è $\frac{6}{20}$. Ora questo $\frac{6}{20}$ è il rotto di rotto, perciocchè esprime tre quarte parti dell' unità, in conseguenza un fratto; e di questo fratto se ne vuole prendere una porzione dinotata da $\frac{2}{5}$, il che riducesi ad avere $\frac{2}{5}$ parti del $\frac{3}{4}$,

onde $\frac{6}{20}$ giustamente appellasi fratto di fratto. Del pari si può pervenire ad un'espressione di rotto di rotto di rotto. Come per esempio dato $\frac{2}{3}$, di questo se ne domanda $\frac{3}{5}$, e di queste $\frac{3}{5}$ parti di $\frac{2}{3}$ se ne vogliono $\frac{2}{9}$; s'indicherà così: $\frac{4}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{3}$. Così pure $\frac{5}{6}$ di $\frac{7}{8}$ di $\frac{4}{9}$ di $\frac{8}{12}$; e ad ottenere la frazione, di frazione, o la frazione di frazione di frazione, o la frazione di frazione di frazione, ec., bisogna moltiplicare tutti i numeratori de' fratti, ed i denominatori, (n.° 61. cas. II.) il prodotto di tutte le frazioni sarà la frazione di frazione. Così nell'esempio di $\frac{4}{9}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{3}$, si moltiplichino 4 per 3 per 2, che danno 24, poi 9 per 5 per 3, che danno 135. Indi si scriva $\frac{24}{135}$. Sarà questo il fratto uguale alle $\frac{2}{3}$ parti delle $\frac{3}{5}$ parti delle $\frac{4}{9}$ dell'unità. Imperciocchè, fermandoci alle $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{9}$, si ha $\frac{12}{45}$ di

poi prendendo di $\frac{12}{45}$ le $\frac{2}{3}$ parti, si ha $\frac{24}{135}$, e così per l' altro esempio. Laonde segue

Regola. Si avrà un fratto di fratto di fratto di, ec. facendo un fratto, il cui numeratore eguagli il prodotto de' numeratori di tutti, e 'l denominatore il prodotto de' denominatori.

Della divisione de' fratti.

66. La divisione de'fratti è una operazione, onde, date due frazioni, una vuole dividersi per l' altra, e rinvenire il quoto. La frazione che vuole dividersi chiamasi *dividendo*, quella che divide *divisore*, il risultato *quoto* si appella.

67. *Probl. Data la frazione* $\frac{2}{5}$ *dividerla per lo fratto* $\frac{3}{4}$. Si dispongano come si vedono, a sinistra il dividendo, a destra il divisore, e fra essi due punti verticali come $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$. Si rovesci il divisore, passando il denominatore a numeratore, e 'l numeratore a denominatore, così $\frac{4}{3}$. Di poi si scriva $\frac{2}{5}$, e si moltiplichi per $\frac{4}{3}$, si avrà $\frac{8}{15}$, sarà questo il quoto addimandato. O pure si moltiplichino i fratti in croce, cioè numeratore del

dividendo pel denominatore del divisore, e 'l denominatore del dividendo pel numeratore del divisore, si avrà pure $\frac{8}{15}$.

Per comprendere la giustezza dell' operazione, fa d' uopo richiamare ciò che si disse (n.° 49. 5.°). Ivi si dimostrò che il quoto varia al variar del divisore; ed esso sarà doppio se il divisore diventi metà, sarà triplo, se diventi terza parte, quadruplo, se diventi quarta parte, ec. Ora riprendendo il dividendo $\frac{2}{5}$, e si supponga diviso per 1 il quoto sarà $\frac{2}{5}$. Se invece di 1, lo diviamo per un $\frac{1}{2}$, il quoto sarà doppio, cioè $\frac{4}{5}$, se per un $\frac{1}{3}$, sarà triplo il quoto, cioè $\frac{6}{5}$, se per $\frac{1}{4}$, sarà quadruplo, cioè $\frac{8}{5}$; se per $\frac{2}{4}$, il quoto diverrà metà del quadruplo, cioè $\frac{4}{2}$ di $\frac{2}{5} = \frac{8}{10}$, per essere il divisore $\frac{2}{4}$ doppio di $\frac{1}{4}$. Se in fine per $\frac{3}{4}$, diverrà $\frac{4}{3}$ di esso $\frac{2}{5}$, o sia $\frac{8}{15}$. Adunque per ottenere il quoziente.

Regola. Nella divisione de' fratti è necessario rovesciare la frazione, che fa da divisore, e poi moltiplicarla col dividendo (n.° 61.).

68 *Scolio* I. Che se si moltiplichi la frazione che indica il divisore per la frazione, che disegna il quoto, si avrà la frazione del dividendo. Così $\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}$ $=\frac{24}{60}$, la quale si riduce a $\frac{2}{5}$, dividendo sopra, e sotto per 12, il che non muta valore (n.° 49 7.°) Ed è $\frac{2}{5}$ il dividendo. Dunque cotesta pruova è una novella dimostrazione della regola della divisione de' rotti.

ESEMPIO

Dividere un' intero con rotto per un' intero con rotto. Sia $17+\frac{2}{3}$ da dividersi per $12+\frac{2}{5}$. Si riduca il dividendo $17+\frac{2}{3}$ ad un fratto spurio, e così il divisore, cioè $\frac{53}{3}:\frac{63}{5}$, e poi si operi come si è indicato (n.° 67), e si avrà il quoto $\frac{265}{189}$ $=1+\frac{76}{189}$, eseguendo la divisione

69 *Scolio*. II. Per mezzo della divisione de'fratti si può ora fare la pruova della moltiplicazione di essi.

Sia $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{18}$.

Pruova. Dividasi il prodotto $\frac{10}{18}$ per uno dei fattori $\frac{2}{3}$, e si avrà $\frac{5}{6}$. Infatti $\frac{10}{18} : \frac{2}{3} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$, dividendo sopra, e sotto per 6. Il che è una nuova dimostrazione del giusto operare nella moltiplicazione de' fratti.

Modo di valutare le frazioni ripetto ad un tutto di data specie.

70. Sovente avviene che uno voglia sapere il valore di una frazione rispetto al tutto di una data specie, di cui quella è parte, perciò è necessario additare il modo, onde possa ciò ottenersi. Se, per esempio, si abbia la frazione $\frac{5}{9}$ di lira, e la si voglia valutare in soldi. Per ottenere ciò è necessario sapere il modo onde dare ad un fratto un dato denominatore, senza cambiarlo di valore. A ciò fare serve il seguente problema.

71. *Probl. Dare ad un fratto un denominatore qualunque, senzacchè perda il proprio valore.*

Sia il fratto $\frac{5}{9}$, e si voglia cambiare in altro, che abbia 20 per denominatore. Si moltiplichi 5 per 20, ciò che da 100, e si divida 100 per 9, il che da $11+\frac{1}{9}$. Indi si ponga 20 per denominatore, e si avrà l' altro fratto $\frac{11+\frac{1}{9}}{20}$: dico essere

cotesta frazionaria espressione uguale a $\frac{5}{9}$.

Imperciocchè, moltiplicando del fratto $\frac{5}{9}$ l'un termine, e l'altro per 20, si avrà $\frac{5\times 20}{9\times 20}$, il che non muta il suo valore(n.°49.6°).Ma $\frac{5\times 20}{9\times 20}$ è uguale a $\frac{100}{9}\times\frac{1}{20}$, ed eseguita la divisione del $\frac{100}{9}$, che da $11+\frac{1}{9}$ si avrà, moltiplicandolo poi per $\frac{1}{20}$, $\frac{11+\frac{1}{9}}{20}$, quale ultima espressione ridotta, darà di nuovo $\frac{5}{9}$. C. B. F. D.

Ciò posto, riportiamo una tale riduzione a $\frac{5}{9}$ di lire. Siccome la lira costa di 20 soldi, così il fratto $\frac{11+\frac{1}{9}}{20}$ esprime 11 soldi, ed $\frac{1}{9}$ di un soldo, essendo la lira composta di 20 soldi, cosicchè riduce l'espressione a $11+\frac{1}{9}$.

ESEMPIO.

Si vuole valutare $\frac{3}{4}$ di un piede in pollici. Essendo il piede di 12 pollici, si avrà trasmutando il fratto $\frac{3}{4}$ in un altro, che abbia 12 per denominatore. Si scriva dunque il fratto così $\frac{3\times 12}{4} : \frac{12}{1} = \frac{36}{4} : \frac{12}{1}$. E dividendo 36 per 4, e poi dopo dividendo per 12, come sta indicato, si avrà $\frac{9}{12}$, vale a dire nove dodicesimi di piede. Per la qual cosa, essendo il piede diviso in 12 pollici, il fratto esprimerà 9 pollici.

72. Intanto per servire all' intelligenza de'principianti, fo uso del seguente metodo, che mentre è lo stesso del precedente riesce più facile.

73. *Probl. Si voglia valutare in minuti secondi* $\frac{5}{7}$ di *grado.*

Si ponga 5 per dividendo, 7 per divisore.

Dividendo	5		7 Divisore
minuti	60'		
minuti	300'		$0^{\circ}, 42', 51'' + \frac{3''}{7}$
	28		
	20		
	14		
	6		
minuti secondi	60"		
	360	secondi	
	35		
	10		
	7		
	3		

Siccome il grado componesi di 60', così non essendo 5 divisibile per 7, pongo zero per quoto de' gradi, e riduco i gradi a minuti, moltiplicando 5 per 6 e si avranno 360'. Fatta la divisione ottengo 42 per quoto, e per residuo 6: moltiplico il 6 per 60", ed ho 360", che divisi per 7 danno di quoto 51", e per residuo 3, i quali si indicano col fratto di secondi così $\frac{3''}{7}$. Dunque la frazione $\frac{5}{7}$ di grado valore 42 primi, 51 secondi, e $\frac{3}{7}$ di secondo.

Così pure valutasi in pollici $\frac{7}{15}$ di tesa, riducendo la tesa a pollici, cioè moltiplicando il 7 per 72 pollici, de' quali va composta la tesa, e poi dividendo per 15, e si avrà il quoto in pollici.

74. Nel modo stesso si valuta in carlini, grana, e calli $\frac{8}{9}$ di docato, riducendo l' 8 docati a carlini, poi a grana, il che si ottiene, moltiplicando l'8 per 10, per avere i carlini, ed indi il residuo per 10, per avere le grana, poi per 12, che è il numero de' calli del grano, per avere il quoto di calli

La dimostrazione di tutti i quali casi è chiara abbastanza; non essendosi fatto altro, che dividere ciascun tutto in parti aliquote di esso, e quelle in altre, e poi prendere di ciascuna specie un dato numero per quoto.

Della riduzione de' fratti a minimi termini, o sia a semplice espressione

75. Se ne' calcoli de' numeri si ottenessero dei risultati di numeri interi, niente più agevole sarebbe valutare la grandezza delle cose rappresentate da que' numeri, ma come il valore di queste si presenta il più spesso in numeri frazionarj, avviene, che dobbiamo forzosamente fare uso di simili espressioni; ed è perciò che ne abbiamo diffusamente trattato ne' numeri precedenti. Però quantunque non ci è permesso di dare da' calcoli il bando alle frazioni, perchè ce lo impedisce natura, che in ma-

teria di quantità si presenta in tanti modi diversi, non di meno potremo talora dare alla frazioni tale espressione, che sia la più semplice di tutte quelle, sotto cui possono elleno presentarsi, ed in tal modo ci libereremo da quegl' incomodi, cui vassi incontro, quando la lor forma sia molto composta. Di fatti la frazione $\frac{225}{450}$ imbarazza assai più, che non fa $\frac{1}{2}$, che è eguale ad essa; poichè la prima esprime l'unità divisa in 450 parti, delle quali se ne debbono prendere 225, come l'indica il numeratore, laddove la seconda esprime l'unità divisa in due parti, e di esse se ne deve prendere una, la qual cosa è di facilissimo concetto, e di esecuzione. Adunque la riduzione delle frazioni a minimi termini è un problema della più grande utilità nell' Aritmetica, ed è perciò che bisogna trattarlo colla massima chiarezza, ed estensione. A farlo convenientemente, fa d' uopo premettere talune definizioni.

76. *Def.* Un numero intero A, che misura esattamente un altro numero B si chiama *fattore* di esso, perciocchè quel numero A moltiplicato per un altro produce il B. Così di 28 n' è fattore 4, il quale, oltre che cape esattamente in 29 7 volte, n' è fattore anche, poichè $7 \times 4 = 28$.

77. *Def.* Un numero, che misura esattamente due altri numeri, dicesi *fattore comune*, o *divisore comune* di quei due numeri. Così per esempio, il 12, che divide esattamente 24, e 60 chiamasi *fattore comune* di 24, e 60, ovvero *divisore comune*.

E se fra molti numeri divisori di due altri vi sia uno, che sia il massimo, questo chiamasi *massimo fattore comune*, o *massima comune misura.* Così 24, e 60 han per fattori i numeri comuni 2, 3, 4, 6, 12: il 12 dicesi massimo comun fattore, o misura, appunto perchè contiene ciascun'altro in se stesso.

98. *Def.* Un numero intero, che non ha altro divisore, che o se stesso, o l'unità, si dice *numero primo.*. Per esempio 3, 5 sono numeri primi, perchè ciascuno è misurato da se stesso, e da 1. Sono poi numeri *primi tra loro* quelli che non sono misurati da altro numero, che dell'unità. Tali sono 3, 8, quantunque 8 abbia isolatamente i fattori 2, 4.

99. *Def.* Una frazione dicesi ridotta a *minimi termini*, qualora i termini di essa, avendo un comune divisore, e questo sia il massimo, si dividano per esso, e rimangano numeri primi tra loro. Così $\frac{24}{108}$ divisa sopra, e sotto per 12, da $\frac{2}{9}$; e 2, e 9 sono primi tra loro, perciò la frazione $\frac{24}{108}$ dicesi ridotta a minimi termini. Il risultato $\frac{2}{9}$, come ogni altra frazione per esempio $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{7}$, ec., essendo di numeri primi tra loro, è irreducibile di vantaggio.

100. *Scol.* Ridurre adunque una frazione *a minimi termini* è appunto rinvenire un massimo fattore

comune al numeratore, ed al denominatore della frazione, pel quale dividendo si l'uno, che l'altro termine, il che non cambia il suo valore, (n.°49.7.°) si abbia una frazione di semplice espressione. Fa d'uopo perciò esporre un metodo onde rinvengasi cotal massimo divisore o *comune misura*.

101. *Probl. Esporre il metodo, onde rinvenire il massimo comun divisore di due numeri che non siano primi fra loro.*

Dispongansi in modo che il maggiore faccia da dividendo, e 'l minore da divisore, e si esegue la divisione, la quale, se riesca esatta, sarà il divisore la massima comun misura; perciocchè mentre divide se stesso, divide pure l' altro esattamente. Che se ciò non sia, rimarrà un residuo. In tal caso, trascurato il quoto, si passi il residuo per divisore, e 'l primo divisore per 2.° dividendo; e trascurato di bel nuovo il quoto 2.° si passi il residuo per divisore, e 'l divisore per dividendo, e ciò si pratichi, sino a che si abbia zero per residuo. Sarà l' ultimo divisore il massimo comun divisore de' numeri dati, il che dimostro, dietro l' operazione, che qui distendo.

ESEMPIO II.

Sia dunque la frazione $\frac{72}{884}$, *e si voglia il massimo divisore de' suoi termini.*

Si ponga 884 per dividendo, 72 per divisore, e si esegua l'operazione indicata nel n.° precedente.

1.° Dividendo	884	72	1.° divisore
	72	12	quoto
	164		
	144		
1.° residuo	020	20	2.° divisore
2.° Dividendo	72		
	60	3	quoto
2.° residuo	12	12	3.° divisore
3.° Dividendo	20		
	12	1	quoto
3.° residuo	8		
4.° Dividendo	12	8	4.° divisore
	8	1	quoto
4.° residuo	4		
5.° Dividendo	8	4	5.° divisore
	8	2	quoto
5.° residuo	0		

Imperciocchè, supposta la disposizione indicata, il 5.° divisore 4 misura esattamente il 5.° dividendo 8. Or siccome il 4.° dividendo 12 diviso per 8 4.° divisore da 1 per quoto, e 4 di residuo, così 4, dividendo 8, e se stesso, dividerà pur 12, essendo $12 = 8 \times 1 + 4$ (n.° 39). Ma 20 3.° dividendo diviso dal 3.° divisore 12 da per quoto 1, e per residuo 8, sarà perciò il 20 diviso esattamente anche dal 4, per essere $20 = 12 \times 1 + 8$. Inoltre il 2.° dividendo 72 diviso per 20, da per quoto 3, e 'l residuo 12, segue pure, che il 72 è divisibile per 4, essendo $72 = 20 \times 3 + 12$. Finalmente 884 primo dividendo è parimente divisibile per lo 4, essendo $884 = 72 \times 12 + 20$.

Dunque 4 è il comun divisore. Dividendo la frazione sopra, e sotto per 4 si ha $\frac{18}{221} = \frac{72}{884}$ (n.° 49. 7.°), la quale è irriducibile ulteriormente.

Def. Numeri *razionali* sono quelli, de' quali ciascuno ha un' esatta misura. *Irrazionali* sono quelli che non l' hanno.

102. Pria di passare oltre, e per completare cotesto articolo, non è fuor di proposito di istruire i giovinetti del modo di ritrovare tutti i fattori di un dato numero. Il che vado ad eseguire.

103. *Probl. Dato il numero 120, ritrovare tutti i numeri, che lo dividano esattamente, ovvero i suoi fattori.*

Divido un tal numero per tutti i numeri primi 1, 2, 3, 5, ec. che egli può contenere, e bado di dividerlo per un medesimo numero, quanto è pos-

sibile, poi passo a dividere i risultati per altro numero, e noto i quozienti. Adunque 120 diviso per 1 da 120 per quoto, divido 120 per 2, si ha 60, divido questo quoto per 2 si ha 30, e dinuovo per 2 si ha 15. Non potendo il 15 dividersi per 2, lo divido per 3, e si ha 5, divido il 5 per 5, e si ha 1 per quoto. Adunque la divisione pe' numeri primi non può più eseguirsi. Laonde noto tutti i quoti, come si veggono 1, 2, 2, 2, 3, 5, i quali sono i numeri primi, che dividono 120. Per ritrovare i divisori composti, moltiplico cotesti semplici, due a due, moltiplicando primo per secondo, primo per terzo, primo per quarto, primo per quinto, primo per sesto, il quale primo prodotto non scrivo essendo lo stesso de' numeri scritti. Passo poi al secondo, e lo moltiplico pel terzo, poi secondo per quarto, poi secondo per quinto, e secondo per sesto. Comincio dal terzo, e moltiplico terzo per quarto, terzo per quinto, terzo per sesto. Poi quarto per quinto, quarto per sesto. Finalmente quinto per sesto. Comincio in seguito i prodotti tre a tre, prendendo a moltiplicare i primi due col terzo, i primi due col quarto, i primi due col quinto, i primi due col sesto. Poi lasciato il primo, moltiplico secondo, terzo, e quarto, e di nuovo secondo terzo, e quinto, e secondo terzo, e sesto. Passo al terzo, e moltiplico terzo, quarto, e quinto, terzo quarto, e sesto. Passo al quarto, e moltiplico quarto, quinto, e sesto, e finisce il prodotto a tre a tre. In seguito fo i prodotti a quattro a quattro, come si è fatto per i prodotti a due, a tre. Ciò il mostra la

seguente tavola, che esprime tutti i prodotti fino a cinque a cinque.

Fattori di numeri primi.

1, 2, 2, 2, 3, 5	
4, 4, 6, 10	Prodotti due a due
4, 6, 10	
6, 10	
15	
4, 4, 6, 10	Prodotti tre a tre
8, 12, 20	
12, 20	
30	
8 12, 20	Prodotti quattro a quattro
24, 20	
60	
24, 40	Prodotti cinque a cinque
120	

Siccome in questa tavola si trovano ripetuti i medesimi numeri, così, sopprimendone gl' identici, si avranno per fattori di 120 i seguenti
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

Così pure si ritrovano i fattori di 72, che sono
1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

La dimostrazione apparisce da ciò che essendosi i numeri 1, 2, 3, ec. . . . 120 ottenuti, dividendo il 120 successivamente per 1, 2, 3, saranno questi fattori di esso, e combinati in modo conveniente, come ognuno il potrà fare, produrranno 120. C. B. F. D.

104. *Scol.* Un tal metodo, oltre che giova a ri-

trovare i fattori razionali dell' equazioni numeriche dell' algebra, reca vantaggio pure all' aritmetica, perchè per esso possiamo tosto ridurre a minimi termini una frazione, dividendo pe' numeri primi, o pe' loro composti, si il numeratore, che il denominatore. Così a ridurre la frazione $\frac{75}{96}$ a minimi termini, saggio prima di divider per 2 sopra, e sotto; e come non è possibile saggio per 3, e si ha $\frac{25}{32}$. Sia l'altra $\frac{880}{1248}$. Divisi i termini prima per 2, si ha $\frac{440}{624}$, di poi per 2, si ha $\frac{220}{312}$, di poi per 2, e si ha $\frac{110}{156}$, di poi per 2, e si ha $\frac{55}{78}$ che è la ridotta a minimi termini, perchè costa di numeri primi tra loro.

Delle frazione continue.

105 Allorchè si ha una frazione irreducibile di grandi numeri, e si vuole approssimare il quoziente, che ella ne indica, in numeri più piccoli, fassi uso di una particolare specie di frazione, la quale, per moltiplici frazioni successive, che involge, *frazione continua* si appella. La sua forma è tale, che il suo denominatore è composto di un' intero, ed una frazione, la quale frazione ha per denominatore un' intero, ed un' altra frazione, la quale similmente ha per denominatore un' intero, con una frazione, e così di seguito, nel modo stesso. Tale è

la seguente.

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Essa nasce dal fratto spurio $\frac{1103}{887}$. Il metodo a ridurlo a quella frazione continua vien mostrato dal seguente problema.

106 *Probl. Dato il fratto spurio* $\frac{1103}{887}$: *ridurlo a frazione continua.*

Si disponga il numero 1103 per dividendo, ed 887 per divisore. Indi procedendo alla divisione, si vegga quante volte 887 cape in 1103, e poichè vi si contiene 1, con un residuo di 216: questo dovrebbesi indicare con un fratto, e porlo accanto ad 1, cioè $1+\frac{216}{887}$. Io però noterò soltanto 1, e di poi dividendo tanto il numeratore quanto il denominatore per 216, otterrò la frazione $\cfrac{1}{4+\cfrac{23}{216}}$. In seguito appigliandomi alla frazione $\frac{23}{216}$, divido similmente per 23

sopra, e sotto, ed avrò $\frac{1}{9+\frac{9}{23}}$. Eseguo la stessa operazione sulla frazione $\frac{9}{23}$, ed avrò $\frac{1}{2+\frac{5}{9}}$. Fo lo stesso su $\frac{5}{9}$, ed ho $\frac{1}{1+\frac{4}{5}}$. Finalmente la stessa operazione eseguo su $\frac{4}{5}$, ed ho $\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$, ove si arresta la serie della frazione. Adunque ritornando all' origine delle operazioni, dispongo i quoti successivi nella loro naturale situazione così, come si vede.

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Imperciocchè la prima cifra è il quoto di $\frac{1100}{887}$ da cui essendo restato il fratto $\frac{216}{887}$, questo ha dato

$\dfrac{1}{4+\dfrac{23}{216}}$, onde si sarebbe dovuto scrivere $1+\dfrac{1}{4+\dfrac{23}{216}}$:

ma $\dfrac{23}{216}$ ha dato $\dfrac{1}{9+\dfrac{9}{23}}$, perciò la frazione avrebbe

la seguente forma $1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{9+\dfrac{9}{23}}}$

Ma $\dfrac{9}{23}$ ha condotto ad $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{9}}$, onde di nuovo la fra-

zione continua sarebbe $1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{9+\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{9}}}}$

Ma $\dfrac{5}{9}$ ha dato $\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{5}}$, onde, sostituendo cotesto va-

lore, si avrà $1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{9+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{5}}}}}$

Finalmente $\frac{4}{5}$ da $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}$. Si avrà perciò la frazione

continua

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Adunque la frazione spuria $\frac{1103}{887}$ si è ridotta ad una frazione continua.

Onde sorge la regola generale, la quale è la guente *Regola.*

Dividasi il numeratore della frazione proposta per lo suo denominatore, e si noti il quoziente; dividasi in seguito il denominatore per il residuo, e si noti il quoziente; dividasi appresso questo primo residuo per lo secondo residuo, e si noti il quoziente, si continui, dividendo sempre il penultimo residuo per l' ultimo, fino a che si giunga ad una divisione senza residuo, il che deve avvenire necessariamante, perchè i residui son numeri interi, che vanno diminuendo, e si avrà la frazione continua.

107. *Coroll.* Che se sia una frazione genuina da ridursi a continua, si divida sì il numeratore, che il denominatore per il numeratore, e ciò in tutte le frazioni emergenti, come si è praticato nel numero precedente per la frazione $\frac{216}{887}$ che è parte della spuria $\frac{1103}{887}$ uguale alla continua

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Ciò forma il Problema diretto, venghiamo ora all' inverso.

108. *Probl. Data la frazione continua, ritrovare quella, d' onde sorge, ovvero la generatrice.*

Si cominci con ordine retrogrado, e propriamente dall' ultimo denominatore, che contiene l' intero coll' ultima frazione $\frac{1}{4}$: aggiungendo insieme $\frac{1+1}{4}$, al che fare, riduco ad un solo fratto spurio $\frac{1+1}{4}$, che ridotto, sarà $\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$. Adunque $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}$ è lo stesso che $\cfrac{1}{\cfrac{5}{4}}=\frac{1}{1}:\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$, eseguendo

la divisione. E poichè nel 4.° denominatore vi è prima l'unità, sarà esso uguale ad $\frac{1}{1}+\frac{4}{5}$, che ridotti allo stesso denominatore, ed unite, danno $\frac{9}{5}$. Onde la frazione del 3.° denominatore equivale ad $\frac{1}{\frac{9}{5}}=\frac{1}{1}:\frac{9}{5}=\frac{5}{9}$ ma vi è 2. Sarà perciò tutto $2+\frac{5}{9}$, che aggiunti daranno $\frac{18+5}{9}=\frac{23}{9}$. Quindi la frazione del 2.° denominatore sarà $1:\frac{23}{9}=\frac{9}{23}$, alla quale aggiunto il 9, che è parte del 2.° denominatore, e si avrà $9+\frac{9}{23}$, che ridotto allo stesso denominatore, sarà uguale a $\frac{216}{23}$, che è il totale denominatore della frazione del 1.° denominatore. Laonde $1:\frac{216}{23}=\frac{23}{216}$ è la frazione del 1.° denominatore, alla quale aggiunto il 4, si avrà $\frac{4+23}{216}=\frac{864+23}{216}=\frac{887}{216}$ Onde 1, che è il numeratore della prima frazione diviso pel suo denominatore pocanzi trovato $\frac{887}{216}$ cioè $1:\frac{887}{216}$, sarà $\frac{216}{887}$, che è uguale a tutta la frazione continua. A questa aggiunto l'intero 1, si avrà

$\frac{1+216}{887} = \frac{887+216}{887} = \frac{1103}{887}$, che è la frazione spuria generatrice della frazione continua. C. B. F.

109. *Scolio*. Lo stesso metodo si pratica per ridurre in continua l'altra frazione $\frac{3145926535}{10000000000}$, che esprime il rapporto della circonferenza del cerchio al diametro, della quale, dividendo si il numeratore, che il denominatore di ciascuna frazione emergente, sorge la frazione

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

la quale potranno per esercizio ricavare i giovanetti.

110 *Scol.* Le frazioni continue danno una espressione la più semplice, e la più esatta, quanto è possibile, di un numero qualunque, sia razionale, sia irrazionale.

Pare che Milord Brouncker sia stato il primo ad immaginare queste specie di frazioni continue. Egli forse le applicò a dinotare il rapporto del quadrato circoscritto all'aja del cerchio, il quale rappor-

to esprimesi per la frazione $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\text{ec.}}}}$

ma è dubbio l' asserirlo : quello, che le ha fatto conoscere il primo, è stato Ugenio, il quale si serve delle frazioni continue, per trovare le frazioni le più semplici, e nel tempo stesso, le più approssimanti di una frazione data (Ugenio Tract. de Autom. Planetario). Altri abili geometri l' hanno applicate ad utili teorie, e Lagrange è stato il primo a servirsene nella risoluzione delle equazioni (La Grange Risoluzione dell' equazioni numeriche pag. 26)

Coteste frazioni continue possono essere finite, o infinite nell' estensione di denominatori. Saranno *finite*, quando nascono da frazioni razionali, ovvero le loro generatrici costino di numeri razionali; *infinite*, se costino di numeri irrazionali le loro generatrici.

111. Riprendiamo ora la frazione $\frac{314159265 35}{10000000000}$

del n. 107 risoluta nella continua

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{792+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{ ec.}}}}}}}$$

per vedere l' uso che conviene farne 1.° A tale uopo prendendo solamente il primo termine 3 della frazione continua, si avrà un primo valore approssimante della frazion proposta $\frac{31419..\text{ec.}}{100000..\text{ec.}}$. Un tal valore, come è chiaro, è minore del vero, perocchè il denominatore 100000..ec. contiensi assai più che 3 volte nel numeratore 31459..ec. 2.° Prendansi i due primi termini della medesima serie, e si avrà un secondo valore approssimante $\frac{3+1}{7}$, d' onde ridotti a fratto spurio, si avrà $\frac{21+1}{7}=\frac{22}{7}$, questo valore è più grande della frazione proposta, appunto perchè il denominatore 7 della frazione integrante è minore del vero, dovendo essese aumentato del risultato delle frazioni, che sono a dritta, il quale viensi a trascurare, e (n.°49.5.°) si rileva, che il quoto divien maggiore, quando il denominatore si

minora, restando lo stesso il numeratore, ed al contrario divien minore il quoto, quando si fa più grande il denominatore. Onde la frazione $\frac{1}{7}$ è troppo grande; e per tal motivo è pur grande $\frac{21}{7}$.

3,° Prendiamo i tre primi termini della nostra serie, noi avremo per terzo valore approssimante $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$

La frazione $\frac{1}{15}$ dev' essere aggiunta al denominatore 7 della precedente; ridotti dunque $7+\frac{1}{15}$ ad una frazione, sarà $\frac{7\times15+1}{15}=\frac{105+1}{15}=\frac{106}{15}$. Onde la frazione continua $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$ è la stessa di $\cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}=1:\frac{106}{15}=\frac{15}{106}$. Il valore de' primi termini di nostra serie è dunque $3+\frac{15}{106}$ ovvero riducendo tutto a frazione (n.° 57) $\frac{318+15}{106}=\frac{333}{106}$. Cotesto valoro è troppo piccolo. Perchè il valore della frazione integrante

$\frac{1}{15}$, ove si arresta la serie, è troppo piccolo. Perciò la frazione $\frac{106}{15}$ è troppo grande (prec. n.°). Onde il quoziente di 1 diviso per questa frazione, cioè $\frac{15}{106}$ è troppo piccolo. Dunque l' unione $\frac{3+15}{106}$, ovvero $\frac{333}{106}$ è troppo piccola.

4.° Prendiamo i quattro primi termini della nostra serie: avremo per quarto valore approsimante

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}$$

L' ultima frazione $\frac{1}{1} = 1$ deve essere aggiunta al denominatore 15 della precedente. Così $\frac{1}{15+1} = \frac{1}{16}$, aggiungendo questa frazione al denominatore 7, la somma è $\frac{113}{16}$. Dunque la frazione continua parziale

$$\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}$$

vale $\cfrac{1}{\frac{113}{16}} = \frac{16}{113}$ (n.° 67). Dunque

il valore che si cerca, è $\frac{3+16}{113}$. Questo valore è troppo grande, perchè l' ultima frazione integrante $\frac{1}{1}$ è troppo grande; dunque la frazione $\frac{1}{16}$ è troppo piccola; e per conseguenza $\frac{16}{113}$ è troppo grande, e così pure la frazione $\frac{355}{113}$ è troppo grande.

112 *Scol.* I Se si vuole portare l'approssimazione più lungi, si continuerà ad operare nel modo stesso; e si ritroveranno così de novelli valori alternativamente minori, e maggiori della frazione proposta $\frac{3,141 \text{ ec.}}{10000 \text{ ec.}}$ L'ultimo valore trovato $\frac{355}{113}$ è estremamente approssimante di questa frazione, perchè il denominatore della frazione integrante $\frac{1}{292}$, che si comincia ad escludere in questo caso è assai grande.

113 *Scol. II.* Che se la frazione da svolgersi in continua fosse l'inverso della data, cioè $\frac{10000000000}{3,1415926535}$ il primo valore approssimante $\frac{1}{3}$ sarebbe troppo grande, il secondo $\frac{7}{22}$ troppo piccolo, il terzo $\frac{106}{333}$ trop-

po grande, il quarto $\frac{113}{355}$ troppo piccolo, e così di seguito alternativamente.

De' fratti decimali — Generali considerazioni.

114. Finora abbiamo esposta la teoria delle frazioni ordinarie, e ci sembra di averne diffusamente parlato: rivolgiamoci ora ad un' altra specie di frazioni, che si appellano decimali, e ciò appunto perchè costano di un denominatore, che può crescere in ragion decupla dell' unità, cioè 1, 10, 100, 1000, 10000, ec. Tali sono le frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, che si pronunziano una decima, una centesima, una millesima, ec. Questa specie di frazioni è molto comoda per la calcolazione, perchè l' unità principale, e le unità d' unità rimane divisa uniformemente per 10, ciò che abbrevia le operazioni, e le rende più adattabili ai calcoli.

115. Avendo noi dimostrato (n.° 49. 3.°) che moltiplicando il denominatore di un fratto, esso si faceva minore, e tanto, quanto era il numero che lo moltiplicava, ne segue, che un fratto decimale, che abbia un denominatore decuplo di un altro, avrà il valore decimo di quello, se il denominatore sia centuplo, il fratto diverrà la centesima di quello,

e così appresso. Così per esempio siano i fratti $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ne' quali i denominatori crescono in progressione decupla, come, 10, 100, 1000, 10000, avranno valori diversi, e quello, che ha denominatore decuplo, sarà decimo di quello del denominatore decimo, di manieracche $\frac{1}{100}$ è la decima parte del decimo, $\frac{1}{1000}$ è decimo del centesimo, centesimo del decimo, e così per gli altri. Quindi segue che per avere $\frac{1}{10}$ ci vogliono 10 centesimi, per avere un centesimo ci bisognano 10 millesimi, per avere un millesimo vi bisognano 10 diecimillesimi, ec. Onde anche per avere 1 ci vogliano 100 centesimi, oppure mille millesimi, oppure 10000 diecimillesimi, ec.

A fin di comprendere la genesi di coteste frazioni, fa d'uopo richiamare alla memoria ciò, che fu detto nel (n.° 28). Ivi si fe conoscere, che se una cifra si portasse da destra a sinistra, per ogni posto che avvanzava, il valore diveniva decuplo, dimanieracchè l'unità portata di un posto a sinistra, e lasciato zero al posto, che occupava, diveniva 10, e portata di un'altro posto, diveniva 100, o sia 10 volte maggiore del 10, e quindi 100 volte maggiore dell'unità. Così passando ad un'altro posto, diveniva millupla della prima unità. Viceever-

sa, se la cifra, che occupa il luogo, ove si è milluplicata, passi con moto contrario, di un posto verso destra, ella è non più millupla, ma centupla dell' unità, o sia è divenuta la decima parte di 1000; se passi ad un' altro posto a destra, diviene decupla di 1 intero, e quindi la parte centesima di mille; se poi passi al primo posto, anche a destra, diviene 1, o sia la decima parte del 10, la centesima del 100, e la millesima del 1000.

Giunta la cifra al posto dell' unità, se ella si porti sempre verso destra, per la stessa legge di convenzione, diviene la decima parte dell' unità, poi diverrà la centesima, la millesima, la diecimillesima dell' unità, passando successivamente di un posto, due posti, tre posti, dopo le decine. Così scrivendo il numero 1000, mille unità, e si voglia decimare, ovvero dividerlo per 10, si passerà la cifra significata dal primo posto di essa a destra, scrivendo 0100, oppure 100, cassando un zero a destra, se voglia centesimarsi, ovvero dividersi per 100, si scriverà così 00 10, se millesimarsi, o dividere per 1000 si scriverà 0001, ovvero 1, cassando tre zeri.

Quello che si è operato sul numero 1000, opriamolo sull' unità semplice: se si faccia scorrere tutt' i posti alla sua destra, ella pure diverrà la decima sua parte, ovvero resterà divisa per 10, diverrà la centesima, ovvero divisa per 100, la millesima, diecimillesima, ec. e quindi divisa per 1000,

Allorchè l' unità si fa passare alla sua destra per divenire decima sua parte, fa d' uopo distin-

guere un tal passaggio con una virgola, la quale resta alla sua sinistra, ed alla sinistra della virgola scriversi zero, o unità, se ve ne siano, come per ese. 0, 1, che si pronunzia zero interi, ed una decima, e l'altro 34, 3, che si pronunzia 34 interi, e 2 decimi. E così pure andando a destra la cifra, perchè rimanga fissato il suo valore, si scrivano zeri nei posti, che ella sormonta, ed abbia quel valore, che l'assegna il posto, che occupa, onde in pronunziando qualche espressione di questa sorta di decimali, se ne indichi il valore proprio. Così per esem. 0, 0003 si pronunzierà 3 diecimillesimi; perocchè il primo 0 a destra della virgola indica mancanza di decimi, il secondo mancanza di centesimi, il terzo mancanza di millesimi.

Essendo la virgola linea di separazione tra gli interi, e i decimali, cambiando posto questa, cambieranno i valori dell'espressione numerica. Per la qual cosa, sia l'espressione 8, 356, otto unità, e trecento cinquantasei millesimi, e si trasporti la virgola da sinistra a destra, un posto per volta, si avrà 83, 56, 83 unità, e 56 centesimi, valore diverso dal primo. Perciocchè analizzando questo secondo valore, troviamo, che essendo passata la virgola a destra, li 3 decimi trovansi divenuti 3 unità; e 3 unità sono il decuplo di 3 decimi, perciò il 3 decimo è stato moltiplicato per 10; così pure 5 centesimi divenendo 5 decimi, ed i decimi essendo decupli dei centesimi, rimane il 5 moltiplicato per 10; nel modo stesso, 6 millesimi passando a significar centesimi, ed i centesimi sono decupli dei

millesimi, rimane pur esso moltiplicato per 10 Dunque l'espressione decimale è divenuta con tale operazione decupla della precedente. Similmente 8, che dinotava le unità è divenuto 80, ed 80 è decuplo di 8. Dunque ancora l'intero è deciplicato. Laonde tutta l'espressione composta d'interi, e decimali, pel posto cambiato verso destra della virgola, è restata moltiplicata per 10. Similmente trasportando la virgola di un'altro posto a destra, diverrà 835, 6, 835 interi, e 6 decimi, e questa è decupla della precedente 83, 56, la quale, essendo decupla di 8, 356, sarà perciò centupla di questa, onde l'espressione 835,6 è centupla di 8, 356. Finalmente passando la virgola a destra del 6, il numero diverrà 8356, il quale, per le stesse ragioni dette, è decuplo di 835,6, e centuplo di 83, 56, e quindi milluplo di 8, 356. *Laonde possiamo conchiudere che per moltiplicare un' espressione decimale per 10, fa d'uopo passare la virgola al posto seguente a destra, se per 100, due posti, se per 1000, tre, ec.*

Operiamo adesso in una maniera inversa; e assumiamo il numero 8356; e traslochiamo la virgola ai posti successivi di sinistra, si vedrà che il numero intero 8356 diverrà 835, 6, 835 interi, e 6 decimi. Ora essendo 6 decimi, decima parte di 6 unità, che fanno 60 decimi, e'l 5 essendo prima 50 è divenuto cinque unità, le quali sono pure il decimo di 50, così il 3, che esprimeva centinaja, esprime decine, e l'8, che esprimeva migliaja, esprime centinaja, i quali essendo decime parti delle centinaja, e delle migliaja,

segue, che il numero è restato diviso per 10; così pure trasportando la virgola di un' altro posto, diverrà il numero 83, 56, decima parte di 835, 6, e quindi anche centesima di 8356, e seguitando il traslògamento della virgola, si avrà 8, 356, che sarà la decima di 83, 56, la centesima di 835, 6, e la millesima di 8356. Onde il numero 8356 rimane con tale operazione diviso per 1000. Dal che segue.

Regola Se si vuole dividere un dato numero per 10, *si separi con virgola verso destra una cifra del numero dato*, *se per* 100 *se ne separino due cifre*, *se per* 1000, *tre*, *se per* 10000, 4, *e così di seguito.*

117 Nel n.° 115 abbiamo mostrato, come l'unità sia uguale a 10 decime parti di essa, una decima parte dell' unità sia uguale a 10 centesime, una centesima uguale a 10 millesime, una millesima uguale a 10 diecimillesime, una diecimillesima, uguale a 10 centomilesime, e così in seguito, dunque l' unità è uguale a 10 decime, ossia, a 100 centesimi, o sia a 1000 diecimillesime, o sia, ec. Così pure una decima parte dell' unità vale 10 centesime, o sia centomillesime, o mille diecimillesime, o sia diecimila centomillesime, ec: E lo stesso dicasi della millesima, della diecimillesima, centomillesima, ec. Laonde, esprimendo un tal ragionamento con de' numeri, si avrà il rapporto di eguaglianza fra l' unità con dieci decimi, tra il decimo con 10 centesimi, ec. cioè sarà l' unità uguale a dieci decimi; 0, 1 = 0, 10 = 0, 100 = 0, 1000 = ec.:

Dal che segue, che se a destra di una espressione decimale si scriva uno due, tre, o molti zeri, non resta mai alterato il di lei valore, e lo stesso avviene se si tolgano de' zeri dalla stessa parte destra.

118 Tutto il contrario avviene, se invece di aggiungere i zeri a destra, si aggiungano a sinistra, che siano però tra la virgola, ed i decimali, come se nell'espressione, o, 845, che esprime 845 millesimi, si frappongano de' zeri in questa guisa, o, 0845; l'altra a o, 00841, o, 000846, o, 0000 845, ec. In tal caso l'espressione rimane nel primo esempio divisa per 10, nel secondo per 100, nel terzo per 1000, nel quarto per 10000, vale a dire le decime, le centesime, le millesime del primo esempio diventano centesime, millesime diecimillesime, dove sono due zeri, le decime diventano millesime, e queste diecimillesime, e così appresso.

119 Sia ora da pronunziarsi un'espressione decimale, quanta lunga si voglia, come questa o., 845, 603',284,167",80.

Si divida essa dagl' interi con una virgola, sicchè il zero a sinistra sia il luogo di essi, e le cifre a destra siano decimali; e divisa tre, a tre con virgole, e di poi posto 1 sulla sesta cifra, sulla dodicesima 2, sulla 18.ma 3, e così sempre, dopo la sesta, si dirà mila alla virgola; milionesimi, dove si trova soprapposto 1, bilionesimi, dove 2, trilionesimi, dove 3, e così appresso, onde dirassi ottocento quarantacinque mila seicento tre milione-

simi dugento ottantaquattro mila cinquecento sessantasette bilionesimi, e siccome rimane 8, potrà ed esso aggiungersi uno, due, o più zeri, il che non cambia il valore, e si finirà di pronunziare, dopo l' aggiunta di 1 zero, 8centomila trilionesimi.

120 Da quanto abbiamo premesso, rilevasi essere la scrittura de' decimali l'espressione del solo numeratore della frazione; la quale ha per denominatore 10,100,1000,10000, ec., come, per esempio, 0,81 esprimesi pel fratto $\frac{81}{100}$, e l'altro 0, 342, 0, 7845, che corrispondono alle frazioni $\frac{342}{1000}$, $\frac{7845}{10000}$, onde si può da quella passare a questa senza alterarsene il valore, e viceversa, avvertendo nel primo caso di scrivere l'espressione decimale sopra una linea orizontale, e sotto scriverci per denominatore 1 seguito da tanti zeri, quante sono le cifre decimali dell' espressione, o volendosi passare dal fratto, si scriverà il solo numeratore, mettendo alla sua sinistra la virgola, così: $0,848 = \frac{848}{1000}$, e viceversa $\frac{848}{1000} = 0,848$.

121 In fine si avverte, che $0,848 = \frac{848}{1000}$ può essere sciolto ne' fratti parziali di diverso denominatore, quali sono $\frac{8}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}$, e viceversa questi ridotti a quella espressione. Imperocchè in quella prima l' 8, che è al posto de' decimi trasmutasi

in $\frac{8}{10}$; 4, che è ai centesimi si cambia in $\frac{4}{100}$; 8, che sta al posto de'millesimi, si muta in $\frac{8}{1000}$, il che giustifica il primo caso. Il secondo passaggio al primo fassi riducendo allo stesso denominatore i tre fratti, e facendolo, come fu detto (n.° 57.), aggiungendo rispettivamente zeri, sopra, e sotto. $\frac{800}{1000}+\frac{40}{10000}+\frac{8}{1000}=\frac{848}{1000}$.

Passiamo ora alle operazioni del calcolo dei decimali, e primieramente all' addizione.

Dell' addizione de' decimali.

122 Allorchè sono dati de' numeri, i quali contengono de'decimali, ovvero siano decimali, senza interi ad essere aggiunti fra loro, il metodo è quello stesso, che si è tenuto per addizionare gl' interi.

ESEMPIO I.

Siano a sommarsi i numeri

$$\begin{array}{r} 385{,}95678 \\ 846{,}72009 \\ 5{,}74336 \\ 1{,}84567 \\ \hline \text{Somma } 1240{,}26590 \end{array}$$

1.° Si scrivano cotesti numeri, come sono qui di-

sposti, cioè gl' interi separati per una virgola, o punto da' decimali, e posti in colonne, in modo che le unità stiano in una sola linea verticale, in un' altra le decine, e così le centinaja, le migliaja, ec. come si è praticato (n.° 19), e così pure disposti i decimali, cioè in una sola colonna i decimi, in un altra i centesimi, in un' altra i millesimi, ec.

2.° Si faccia l' addizione, come se fossero interi, cominciando da sinistra.

3.° Si distinguano con una virgola, o punto, nella somma ottenuta, gl' interi da decimali, e si avrà la somma cercata.

Per mostrare l' adequatezza dell' operazione si rifletta, che disposti già i numeri in colonne, si è cominciato dalla 5.ª colonna de' decimali a destra, che esprime 100millesimi, e si è ottenuto per somma 30centomillesimi: si è scritto 0, e si è riportato 3 10millesimi, giacchè 10 centomillesimi formano 1 diecimillesimo (n.° 115), onde 30 di quelle fanno 3 di queste. In seguito passando alla seconda colonna, si è ottenuto coi 3, 19 diecimillesimi, si è scritto 9, e si è serbato 10 diecimillesime, cioè 1 millesima, che unita alli millesimi della 3.ª colonna, ha dato 15 millesimi; e lasciati 5 millesimi, i dieci millesimi, cioè 1 centesimo uniti a centesimi della colonna 4.ª hanno dato 16 centesimi: lasciato 6 si è riportato 1 decimo alla colonna dei decimi, che unito a quelli della 5.ª colonna ha dato 32 decimi, de' quali lasciato il 2, si è riportato il 30, ossia 3 unità alla colonna degli interi, che con quelli si è ottenuto 20 interi, e scritto zero,

si è fatto il resto dell' operazione, come per gl' interi, e si è ottenuta la somma 1240, 26590.

ESEMPIO II.

Decimali soli.

0,835
0,046
0,78435
0,923873

Somma 2,589223

Della sottrazione de' decimali.

123 La sottrazione si esegue, scrivendo il numero maggiore sopra il minore, e come nell' addizione, interi separati da' decimali; dipoi divisi in colonne d' unità, di decine, ec., per gl' interi; di decimi, centesimi, ec., per i decimali. Indi si faccia la sottrazione, come se fossero interi, e posta la virgola fra i decimali, e gl' interi, si avrà il residuo.

ESEMPIO I.

3845,3873209
1956,8789678

Residuo, o differenza 1888,5083531

ESEMPIO II.

```
o , 8356784
o , 7987435
-----------
o , 0369349
-----------
o , 8356784  Pruova
```

Della Moltiplicazione de' decimali.

124 La moltiplicazione de'decimali si esegue come quella degl' interi, trascurando le virgole de' fattori, e poi separando nel prodotto, verso destra, tante cifre decimali, quante ve ne sono in ambo i fattori.

ESEMPIO I.

Siano da moltiplicarsi fra loro i numeri interi, uniti a' decimali 38,456 , e 42,27.

```
38 , 456 } fattori
42 , 27  }
-------------
   269192
  76912
 76912
153824
-------------
1625,53512 prodotto
```

Si dispongano essi, come se fossero interi, e si esegua la moltiplicazione; e si separino verso destra tante cifre, quante sono nell'uno, e nell'altro fattore.

Il prodotto costerà di cinque cifre decimali, esprimenti 100 millesimi, e 'l resto d' interi. Cioè sarà mille seicento venticinque unità, e 53 mila 512 centomilesimi. Imperciocchè passando nel primo fattore la virgola verso destra di tre posti, il numero rimane moltiplicato per mille; passando la virgola a destra de' due posti del secondo fattore, questo rimane moltiplicato per 100. Allorchè si moltiplicano, il prodotto è maggiore del vero di 100 volte mille, o sia è 100 mila volte maggiore del vero. Laonde bisogna, per ridurlo al vero, dividerlo per centomila, cioè esprimerlo per $\frac{162553512}{100000}$. Ma questo è lo stesso, che 1625, 53512 (n.° 120) Dunque nel prodotto debbonsi separare tante cifre, quanto è la somma delle cifre decimali contenute nell' uno, e nell' altro fattore.

ESEMPIO II.

$$\left.\begin{array}{r} 0,\ 000356 \\ 0,\ 534 \end{array}\right\} \text{fattori}$$

$$\begin{array}{r} 1424 \\ 1068 \\ 1780 \end{array}$$

prodotto 0,000190104

Siano in questo esempio 356 milionesimi da moltiplicarsi per 534 millesimi. Fatta l' operazio-

ne solo sopra i numeri, si avrà per prodotto il numero 190 mila 104. A sinistra di un tal prodotto si scrivano altri tre zeri, per completare il numero delle cifre decimali di ambo i fattori, l'espressione sarà 190 mila 104 dieci mila milionesimi. Imperocchè, per avvalermi di altra dimostrazione, il primo fattore esprimesi come il fratto $\frac{356}{1000000}$, il secondo come $\frac{534}{1000}$. Laonde moltiplicati fra loro questi fratti, daranno il prodotto richiesto, che sarà $\frac{190,104}{1000000000}$, che si pronunzia cento novantamila cento quattro diecimila milionesimi; ora per esprimere 10000 milionesimi vi abbisognano dieci cifre decimali: dunque erano d' uopo tre zeri per aggiungersi a sinistra del prodotto delle cifre decimali significative.

ESEMPIO III.

$$\left.\begin{array}{r} 0,0103 \\ 0,0004 \end{array}\right\} \text{fattori}$$

$$\text{Prodotto } 0,0000412 = \frac{412}{100000000}$$

Divisione de' fratti decimali.

125 La divisione de' decimali si esegue come quella degl'interi. Soltanto al quoziente si separano verso destra tante cifre, da dinotare decimali, quan-

te ne dinota l'eccesso delle decimali cifre del dividendo su quelle del divisore. Laonde.

ESEMPIO I.

Siano interi con decimali a dividersi.

```
                          Divisore 4.23
Dividendo 137 29311   ─────────────
          126 9         32.457 quoto
          ─────
           01039
             846
           ─────
            1933
            1692
           ─────
            02411
             2115
            ─────
             02961
              2961
             ─────
              0000
```

Fatta la divisione, come fossero interi, si separino al quoto tre cifre a destra, eccesso delle cinque di decimali del dividendo sopra le due del divisore, e 'l quoto sarà 32 interi, e 457 millesimi.

Imperocchè trascurata la virgola nel dividendo, esso rimane moltiplicato per 100 mila, e così pure il divisore resta, per la soppressione della virgola, moltiplicato per 100. E dividendo 100000 per 100 si ha il quoto 1000. Il quoto dunque sarà mille volte più del vero; laonde, ad ottenere il ve-

ro, bisogna dividerlo per 1000, o che è lo stesso separare verso destra tre suoi caratteri, che dinoteranno millesimi (n. 116).

126 *Aliter*. Che i 100 millesimi divisi per centesimi diano per quoto diecimillesimi, si dimostra così: sia il fratto $\frac{1}{100000}$ da dividersi per un $\frac{1}{100}$ si avrà, secondo la regola della divisione de' fratti

$$(\text{n.}^{\text{o}}\ 67)\ \frac{1}{100000} : \frac{1}{100} = \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

ESEMPIO II.

Di soli decimali.

Dividendo 0,0000985798	Divisore 0,0235
940	0,004194 quoto
0457	
235	
2229	
2115	
01148	
940	
208	

Fatta la divisione, rimangono 108 milionesimi, li quali possonsi trascurare, qualora si trattasse di una comoda approssimazione, come è nella presente, essendo il vero quoto differente da questo per una grandezza minore di una milionesima.

ESEMPIO III.

```
Dividendo 384,450000 } divisore 28,543
          285,43     } ----------------
          ------     } 13 , 469 quoto
          099 020
           85 629
          -------
           13 3910
           11 4172
          --------
           01 97380
            1 71258
          ---------
            0 261220
              256887
            --------
              004333
```

Il numero a dividersi in questo esempio è 384 interi, e 45 centesimi, e 'l divisore 28 interi, e 543 millesimi, e si vuole un quoto, che si approssimi a' millesimi. A tal uopo ho aggiunto a' decimali del dividendo 4 zeri, uno per equipararlo ai decimali del divisore, il che ha reso interi sì il dividendo, che il divisore, e nel tempo stesso ciascuno moltiplicato per 100 essendo il dividendo ora ridotto a $\frac{384450}{1000}$, e 'l divisore a $\frac{28543}{1000}$, e dividendo l' uno per l' altro, il quoto si riduce a $\frac{384450}{28543} \times \frac{1000}{1000} = \frac{384450}{28543}$, cassati i zeri sotto, e sopra, cioè ad un quoto d' interi, con residuo,

al quale si sono aggiunti gli altri tre zeri per ottenere i millesimi nel quoto. Onde possiamo dedurre da ciò, che se il dividendo sia composto d'interi, e 'l divisore abbia decimali, in tal caso si aggiungano al dividendo tanti zeri, quanti occorrano per equiparare i decimali del divisore, e viceversa, e poi il residuo del dividendo si converta successivamente in decimi, centesimi, millesimi ec. al che perviensi, aggiungendo a destra del dividendo de' zeri, e tanti, quanti ne richiede l'approssimazione.

127 *Scol.* Con questo mezzo si trasmuta una frazione ordinaria in decimale.

ESEMPIO I.

Sia data la frazione $\frac{3}{4}$, *convertirla in decimali.*

Siccome in una frazione il numeratore esprime il dividendo, e 'l denominatore il divisore, così dispongo il 3 per dividendo, e 'l 4 per divisore; e ridotto il 3 in decimi, poi in centesimi, e così successivamente, il che fassi, aggiungendo zeri a destra, scrivo i numeri così

Dividendo 300	Divisore 4
28	0,75 quoto
20	
20	
0	

Essendosi al tre aggiunti due zeri, il 3 è divenuto 300 centesimi, che divisi a 4, si è ottenuto per quoto 75 centesimi.

ESEMPIO II.

Ridurre a millesimi $\frac{7}{8}$

Dividendo 7000	Divisore 8
64	0,875 quoto
60	
56	
40	
40	
0	

ESEMPIO III.

Sia la frazione $\frac{4}{7}$ *da ridursi in decimali*

Dispongansi a suoi termini così.

Dividendo 4,00000	Divisore 7
35	0,57142 quoziente mancante dal vero per meno di un centomillesimo, non essendo potuto il 7 capire tre volte in 20, ultimo dividendo, onde $\frac{4}{7}$=0,57142
050	
49	
010	
7	
30	
28	
020	
14	
06	

CAPITOLO VI.

DEL CALCOLO DE' NUMERI COMPLESSI, OVVERO DENOMINATI.

128 *Def.* Chiamasi numero *complesso*, o *denominato* quello, che componesi di più sorte di unità, tutte però riducibili alla medesima specie: tale è il numero 8 docati, 4 carlini, 6 grana, 8 calli, che quantunque composto di diverse unità, come docati, carlini, grana, calli, riducesi nondimeno a calli.

129 Fra i numeri complessi sono da annoverarsi quelli che esprimono i valori diversi delle monete, delle lunghezze, delle capacità, o volumi, de' pesi, del tempo. Gli uomini per calcolare tante cose, che entrano in commercio, si avvisarono di assumere di ciascuna specie l'unità, e dividere poi questa unità in parti, e queste in altre, affinchè nelle permute, o nelle vendite, ciascuno dasse, e ricevesse non solo quella quantità, che gli abbisognasse, ma anche perchè le merci ricevessero una giusta valuta. Non pensarono essi, allorchè divisero l'unità, a darvi una partizione uniforme, che sarebbe stata molto giovevole alla calcolazione, come è la decimale, la quale è la più semplice, e la più comoda. Ma questa maniera di calcolare, non fu adottata; sia per non essersi sviluppata cotesta teoria de' decimali, sia che particolari circostanze determinar facessero gli uomini a seguire altre divisioni

dell' unità. Quindi avvenne che nel dividere l' unità principale, si appigliarono a quelle divisioni, che più colpirono i loro sensi, finchè il progresso delle arti, e delle scienze determinasse, non meno le più naturali unità delle cose, che la divisione la più semplice di esse, come han praticato i fisico — matematici in questi ultimi tempi.

130 Ogni nazione ha le sue unità. Noi, oltre di quelle che sono state indicate (n.º 5.), abbiamo pur le altre. I Francesi hanno le loro, e qui indico soltanto quelle, di cui ho fatto uso nelli seguenti esempj. Per ora indico delle unità Francesi, soltanto alcune unità di lunghezze, cioè, di monete, e di pesi, e che è necessarie conoscere, per l' intelligenza degli esempj. Coteste unità sono: per le lunghezze, la tesa, il piede, il pollice, il punto; e la tesa vale 6 piedi, 1 piede vale 12 pollici, 1 pollice vale 12 punti. Per li pesi l' unità è la libra, il marco, l' oncia, il grosso, il denaro, e la libra vale 2 marchi, 1 marco vale 8 once, 1 oncia vale 8 grossi, 1 grosso vale 3 denari, ed un denaro vale 24 grani. Per le monete poi, la lira, il soldo, il denaro, e la lira vale 20 soldi, 1 soldo vale 12 denari: il cantajo, il quale dividesi in 100 rotoli, ognuno de' quali dividesi in 33 once, la quale si divide in 30 scrupoli, ec. presso noi.

131 I moderni hanno voluto stabilire le unità di pesi, e misure, e per farlo con esattezza, le hanno desunte dalla natura. Hanno stabilito per unità di lunghezza il *Metro*, Questi è la diecimilionesima parte della quarta parte della circonferenza di

un meridiano terrestre, la quale è stata dagli astronomi valutata per 5130740 tese, e 'l *Metro* che ne è la diecimilionesima parte, è $\frac{5130740}{10000000} =$

piedi	pollici	linee
3.	0.	11,206

132. Moltiplicando questo metro, o dividendolo per 10, 100, 1000, ec., si avranno altre misure lineari moltiplici, o summoltiplici di esso, le quali sono: miriametro, chilometro, ectometro, decametro, decimetro, centimetro, millimetro, de' quali il valore è di 10000, 1000, 100, 10, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$, ec. di metri.

133. Le superficie hanno per unità il metro quadrato.

134. Le solidità il metro cubico.

135. I pesi hanno per unità il *Gramma*, il quale è la millesima parte di lib. 2, gros 5, grani 35, e $\frac{5}{100}$ di acqua distillata pesata nel vuoto alla temperatura di 0,4 di grado del termometro centigrado, che comincia dal termine del giaccio, che si si fonde, fino a quello dell' acqua bollente.

136. Moltiplicando il *gramma*, o dividendolo per 10, 100, 1000, ec., si avranno le misure moltiplici come, decagramma, che vale 10 grammi, ectogramma, che vale 10 decagrammi, chilogramma,

un decimetro cubo, che vale 10 ectogrammi, miriagramma, che vale 10 chilogrammi; così pure 10 decigrammi valgono 1 gramma, 10 centigrammi valgono 1 decigramma, ec: milligramma è il peso del millimetro cubo d' acqua.

137 La moneta ha per unità il *franco*. È questi un pezzo di argento del peso di 5 grammi, in cui vi è $\frac{9}{10}$ di argento, ed $\frac{1}{10}$ di liga.

138 Il franco vale dieci decimi, e 'l decimo vale 10 centesimi, onde il franco vale 100 centesimi. Il decimo è un pezzo di rame del valore di 2 decagrammi. Il centesimo pesa 2 grammi. Il franco vale 1 lira, e 3 denari Il pezzo di 5 franchi pesa 25 grammi, e vale 5 lire, 1 soldo, e 3 denari.

Addizione de' numeri denominati.

139 L'addizione di cotesti numeri si esegue nel modo stesso, con cui si è praticata quella de' numeri interi, scrivendo tutti i numeri in colonne, e distinguendo le unità diverse; si scrivano in una medesima colonna le unità della stessa specie, come i calli sotto i calli, le grana sotto le grana, i carlini sotto i carlini, i docati sotto i docati, e così delle altre specie di unità di lunghezze, di pesi, ec. Di poi, cominciando dalla specie minore, si vada alla maggiore, ritenendo tutte le unità, che possono formare quelle della specie immediatamente maggiore. Il risultato di tutte le addizioni esprimerà la somma totale.

ESEMPIO I.

Siano da aggiungersi i quattro numeri composti di docati, carlini, grana, calli.

	doc.	carl.	gr.	calli
	84	7	3	9
	589	8	5	11
	78	9	7	3
	2	7	8	9
Somma	756	3	5	8

Comincio ad aggiungere i calli, riducendoli ad una sola somma, che giusta il n.° 16 da 32 calli. In questi 32 calli vi sono 2 grana, che compongono 24 calli. Scrivo 8 calli, che restano, tolte le grana due, e li scrivo sotto i calli, e riporto le due grana per aggiungerle alle grana della colonna seguente, la quale colle 2 grana forma 25 grana. Siccomè in questa somma vi sono carlini 2, a grana 5, scrivo 5 grana sotto le grana, e riporto ai carlini 2 carlini, che uniti a quei della terza colonna, danno carlini 33, cioè docati 3 e carlini 3; scrivo i 3 carlini sotto i carlini, e riporto i docati 3 alla colonna de' docati, ed addizionando questi, come al solito de' numeri interi, si avrà in fine la somma di docati 756, di carlini 3, di grana 5, di calli 8.

ESEMPIO II.

Aggiungere insieme i tre numeri composti di lire soldi, denari.

	lire	soldi	denari
	384	8	9
	996	12	11
	18	19	8
Somma	1400	1	4

Comincio ad aggiungere i denari, tolti i soldi che ne nascono, scrivo il residuo 4, poi riporto i soldi, ed ottengo 1 soldo, poi riporto le lire alle lire, ed ottengo 1400 lire.

ESEMPIO III.

Aggiungere insieme i numeri esprimenti canne, palmi, once, minuti.

	canne	palmi	once	minuti
	38	7	9	3
	7	4	5	2
	3	5	11	4
Somma	50	2	2	4

In questo esempio si sono prima sommati i minuti, dalla somma de' quali si sono tolte tutte le on-

ce, per unirle a queste, poi si sono sommate le once, e riportando i palmi, si sono sommati anche questi, in fine le canne, col riportarvi le canne nate dalla somma di palmi.

Sottrazione de' numeri denominati.

140 Si scriva il numero minore sotto del maggiore, mettendo le unità della medesima specie sotto le altre simili, e cominciando dalle minime, si sottraggano le inferiori delle superiori, improntando, se bisogna dalla specie maggiore le unità alla specie minore. Gli esempj seguenti ne daranno pruova.

ESEMPIO I.

	d.	c.	g.	c.
Dal numero	584	7	5	9
	d.	c.	g.	c.
Togliere	396	9	8	11
Resta . .	187	7	6	10

Si cominci a togliere 11 calli da 9 calli, e' come 9 è minore di 11, così si prenda dalle grana a sinistra un grano, che ridotto in calli, ed unito a 9 fanno 21 calli, da quali tolto 11 calli, restano 10 calli; di poi passando alle grana s' impronti loro un carlino; e così a quegli s' improntì un docato, e si esegua la sottrazione, come per gl' interi, si avrà il residuo in 187 docati, 7 carlini, 6 grana, e 10 calli.

ESEMPIO II

	T	P	p	l	punti
Dal Numero.	84	0	7	9	7
	T	P	p	l	punti
Sottrarre.	59	5	9	10	11
			p	l	punti
Resta	24	0	9	10	8

In questo esempio di tese, piedi, pollici, linee, punti si sono tolti prima i punti da' punti, improntando però a questi una linea, poi si sono sottratte le linee, improntando un pollice, poi dai pollici 1 pollice, improntando da piedi un piede, che, come non ne contiene, si è presa una tesa, e assegnata ai piedi, dalla quale improntando un piede ai pollici, rimane 5 piedi ai piedi, da quali si è sottratto 5 piedi, di poi si è passato alle tese, e si è finalmente ottenuto di residuo 24 tese, niun piede, 9 pollici, 10 linee, 8 punti.

ESEMPIO III.

	℔	M	℥	ʒ
Da	5486	0	0	0
Togliere	349	1	7	7
	℔	M	℥	ʒ
	5136	0	0	1

Per potere eseguire la sottrazione, bisogna improntare dalle libre una, che vale due marchi, da questi improntare 1 marco alle once, che vale 8 once, e prendere da 8 once 1, che vale 8 grossi;

poi fare la sottrazione, come al solito, dicendo da 8 grossi tolti 7., resta 1 grosso, poi da 7 once tolte 7 resta 0, poi dal marco 1 tolto 1 resta zero, e così poi dalle decine di libre s'improntì una libra, che unita alle 5, e poi sottratto 9 da 6; e così di seguito, si avranno 5136 libre, niun marco, niun' oncia, 1 grosso.

Moltiplicazione de' numeri denominati, o complessi

141 Nella moltiplicazione de'numeri denominati possono occorrere tre casi 1.° O che il solo moltiplicando è un numero denominato o pure il moltiplicatore solo, 2.° O siano denominati entrambi.

Caso I. Allorchè il moltiplicando è complesso.

Il moltiplicatore essendo destinato ad esprimere il numero di volte che devesi ripetere il moltiplicando, per avere il prodotto, egli non potrà essere, che un numero astratto. Per la qual cosa ad avere il prodotto, fa d' uopo moltiplicare per questo numero ciascuna parte del moltiplicando, e di poi ritenere le unità di specie superiore, che si ricavano da quelle dell' inferiore, per riportarle in quelle.

ESEMPIO I.

	c	p	o	m
Moltiplicare	48	7	8	3
Per.	9			
prodotto	440	5	5	2

Disposti il moltiplicando, e 'l moltiplicatore,

come qui si veggono, comincio a moltiplicare 3 minuti per 9, il prodotto è 27 minuti, il quale 27 contiene 5 once, e 2 minuti. Scrivo 2 minuti, e riporto 5 once per unirle al prodotto di 9 per le once 8. Poi dico 8 per 9 fa 72, che colle 5 once fanno 77 once, cioè 6 palmi, e 5 once; scrivo 5 once, e ritengo 6 palmi: moltiplico 7 palmi per 9, ed aggiunti al prodotto 63 i 6 palmi, ottengo 69 palmi, cioè 8 canne, e 5 palmi: scrivo 5 palmi, e ritengo 8 canne. Moltiplico poi 9 per 48 canne, e vi aggiungo al prodotto 8 palmi di ritenuta, ed ottengo il prodotto 440. Onde il prodotto totale sarà 440 canne, 5 palmi, 5 once, 2 minuti.

142. In questo esempio il moltiplicatore è una sola cifra, ma se fosse di molte cifre, sarebbe mollo fastidiosa l'operazione, dovendosi fare delle molplicazioni a parte, e poi delle divisioni per convertire le specie inferiori in altre superiori. Laonde porta il pregio dell'opera appigliarsi ad un altro metodo, che all'esattezza unisce la brevità. L'esempio seguente lo metterà in chiaro.

ESEMPIO

	c	p	o	m
Moltiplicare il numero	328	6	8	4
Per	484			
Primo prodotto parziale	1312			
Secondo prodotto parziale . . .	2624			
Terzo prodotto parziale . . .	1312			
Quarto prodotto parziale	242			
Quinto prodotto parziale	121			
Sesto prodotto parziale	30	2		
Settimo prodotto parziale	10	0	8	
Ottavo prodotto parziale	4	0	3	1
	c	p	o	m
Prodotto totale. . . .	159159	2	11	1

Incomincio a moltiplicare le 328 canne per lo moltiplicatore 484, e noto i tre prodotti parziali, e passo di poi alla moltiplicazione di 6 palmi per lo stesso 484, ed osservo che se io avessi a moltiplicare una canna per 484, avrei per prodotto 484. Adunque poichè 6 palmi non costituiscono 1 canna, riduco il 6 ad essere una parte fratta di essa; e siccome la canna costa di 8 palmi, così il 6 sarebbe $\frac{6}{8}$ di essa, ma fia meglio scindere il 6 in una metà di canna, che contiene 4 palmi, ed in una metà di metà, ossia $\frac{1}{4}$, che è due palmi. Molti-

plico perciò il 484 per $\frac{1}{2}$ o sia prendo di 484 la sua metà, ed avrò 242 per quarto prodotto parziale, che sottopongo ai primi, di poi ne prendo il quarto, ovvero la metà della metà già scritta, che sarà 121, operazioni, che si fanno a vista, e ritrovo con ciò il quinto prodotto.

Passo alla moltiplicazione di 8 once per 484; e per giungere tutt' insieme a trovare le canne, ed i palmi, che conterrà, considero, che se avessi a moltiplicare un palmo per 484, siccome il palmo è l' ottava parte della canna, così dovrei prendere l' ottava parte di 484; ovvero la quarta parte di 242, metà di 484, ovvero la metà di 242 che è 121, o in fine $60+\frac{1}{2}$ metà di 121, che è poi l' ottava parte di 484. Adunque prendo quest' ottava parte, ma non la noto ancora sotto gli altri prodotti, perchè le 8 once non formano un palmo, ma sibbene $\frac{2}{3}$ di palmo. Per maggiore comodo considero le 8 once divise in 6 once, e 2 once, o sia in mezzo palmo, ed in terzo del mezzo palmo; quindi prendo prima il prodotto di $\frac{1}{2}$ dell' ottava parte di 484, che è appunto canne 30, e palmi 2, che noto per sesto prodotto parziale, e poi $\frac{1}{3}$ di 30^{c}, e palmi 2, cioè 10^{c} canne ed 8 minuti, che similmente noto per settimo prodotto.

Finalmente vengo alla moltiplicazione de' 4

minuti per 484. Osservo, come prima, che se avessi a moltiplicare un oncia per 484, bisognerebbe prendere la dodicesima parte dell' ottava del palmo, cioè la dodicesima del numero 60 $\frac{1}{2}$, ovvero la sesta di 30 $\frac{1}{4}$, ovvero la terza di 15 $\frac{1}{8}$, cioè canne 5, once 4. Ma siccome 4 minuti non formano un' oncia, ma $\frac{4}{5}$ dell'oncia. Adunque prendendo $\frac{1}{5}$ di canne 5, ed once 4, che è 1 canna, e 4 minuti, poi prendendolo quattro volte si ha 4 canne, e 16 minuti, o sia 4 canne, once 3, minuti 1. Scrivo perciò questo numero per ottavo prodotto.

Con questo mezzo tutte le parti del moltiplicando si sono moltiplicate pel moltiplicatore, ed aggiungendo insieme tutti i prodotti parziali, si è ottenuto il prodotto totale 159159 canne, 2 palmi, 11 once, ed un minuto.

143 Cotesto metodo di trovare di seguito il prodotto delle canne, de' palmi, delle once, de' minuti pel moltiplicatore, si appella *metodo delle parti aliquote*, cioè delle parti, che si contengono esattamente nel proprio tutto, tali come i minuti, che si contengono nell' oncia, questa nel palmo, questo nella canna.

Caso II. Allorchè si il moltiplicando, che il moltiplicatore sono numeri complessi, o denominati.

Metodo generale.

ESEMPIO

Sia da moltiplicarsi il numero $\overset{c}{87}\ \ \overset{p}{7}\ \ \overset{o}{5}\ \ \overset{m}{3} = \frac{42208}{480}$

Per. . . . $\overset{D}{58}\ \ \overset{C}{5}\ \ \overset{g}{7}\ \ \overset{c}{8} = \frac{70292}{1200}$

Prodotto. . $\overset{D}{5150}\ \ \overset{C}{8}\ \ \overset{g}{3}\ \ \overset{c}{11} + \frac{141}{180}$

Si riducano prima le canne, i piedi, le once, i minuti alla minima specie, cioè a minuti, in questo modo.

I. Si moltiplichino le 87 canne per lo numero di palmi che compongono una canna, cioè per 8, e si avranno per prodotto 696 palmi, ai quali aggiunti i palmi 7, che sono nel moltiplicando, e si avran- 703 palmi: si moltiplichi 703 per 12 once, e si otterrà, coll'aggiunta dalle 5 once, 8441 once. In fine si riducano queste once a minuti, moltiplicando per 5 il numero 8441, ed aggiunto 3 once, si avranno 42208 minuti. Si faccia un fratto, che abbia per numeratore 42208, e per denominatore 480, che esprime il numero de' minuti che contiene la canna; e si scriva un tal fratto a destra del moltiplicando, cui sarà uguale, percioсchè non si è fatto altro che ridurre il numero $\overset{c}{87}\ \ \overset{p}{7}\ \ \overset{o}{5}\ \ \overset{m}{3}$ al dato denominatore 480, il che non cambia il suo valore.

II. Si riduca similmente il moltiplicatore a calli, moltiplicando prima per 10 i docati 58, ed aggiunti al prodotto carlini 5, poi moltiplicato il risultato per 10 grana, ed aggiunto 7 grana, e finalmente le grana risultanti si moltiplichino per calli, e si aggiungano 8 calli, e si scriva similmente accanto al moltiplicatore, il fratto $\frac{70296}{1200}$, il quale ha per denominatore 1200, numero di calli, in chi si risolve 1 ducato.

III. Si moltiplichino questi due fratti come fu detto (n.° 61), si avrà per prodotto il fratto $\frac{2966884736}{576000}$, il quale è spurio; dal quale per mezzo della divisione si ricaveranno prima docati 5150, poi riducendo a carlini i docati residui, ed indivisibili come docati, si dividano, e si avranno 8 carlini, i quali ridotti a grana, e queste a calli, si avranno grana 3, calli 11, e $\frac{141}{180}$ di calli, il quale fratto di calli si ha riducendo a minimi termini il fratto residuale della divisione di calli $\frac{451200}{576000}$.

144. Metodo del n.° 142.

ESEMPIO II.

Una canna di fabbrica costa docati 4, *carlini* 7, *grana* 8, *calli* 9. *Si chiede il costo di* 284 *canne*, *palmi* 5, *once* 4?

D	c	g	calli	
4	7	8	9	
c	p	o		
284	5	4		
16				
32				
8				
142				
56	8			
22	7	2		
2	1	3		
2	3	9	4	1/2
	5	9	10	1/8
	1	9	11	2/3
1362	8	4	28	1/4

Perchè ciascuna canna costa $\overset{D}{4}\ \overset{c}{7}\ \overset{g}{8}\ \overset{c}{9}$, è chiaro, che ripetendo questo valore tante volte quanto l' esprime il numero delle canne, e parti di canna, che si contengono in $\overset{c}{284}\ \overset{p}{5}\ \overset{o}{4}$, si avrà in docati, carlini, e grana il valore di queste. Un tal numero di volte è un numero astratto, che si compone di 284 interi, e di frazioni della sua unità, cioè della canna.

1.° Moltiplico sulle prime il 4 del moltiplicando per 284.

2.° Dipoi decomponendo il 7 in un mezzo docato, ed in due decimi di docati, moltiplico 284 per $\frac{1}{2}$, e poi per $\frac{2}{10}$, o sia $\frac{1}{5}$, ed avrò prima $\overset{D}{142}$, poi $\overset{D}{56}$, e $\overset{c}{8}$, che soscrivo ai primi prodotti; e risolvendo le grana 8 in metà del carlino, che è il decimo del docato, ed inoltre in tre decimi del carlino. Ed essendo $\overset{D}{56}$, $\overset{c}{8}$ il prodotto di $\frac{2}{10}$ per 284, sarà $\overset{D}{28}$, $\overset{c}{4}$ il prodotto del decimo per 284. Laonde prendo prima $\frac{1}{2}$ di $\overset{D}{28}\ \overset{c}{4}$, che è $\overset{D}{14}\ \overset{c}{2}$, a cui aggiungo; ed avrò $\overset{D}{22}\ \overset{c}{7}\ \overset{g}{2}$, che soscrivo al 56, 8. Moltiplico in fine 284 per $9\ \frac{3}{10}$ di esso, che è $\overset{D}{8}\ \overset{c}{5}\ \overset{g}{2}$. Considerando, che se avessi a moltiplicare un grano per 284, avrei per prodotto $\overset{D}{2}\ \overset{c}{8}\ \overset{g}{4}$; ma 9 calli e $\frac{3}{4}$ di un grano, perciò prendo $\frac{3}{4}$ di $\overset{D}{2}\ \overset{c}{8}\ \overset{g}{4}$, che sono $\overset{D}{2}\ \overset{c}{1}\ \overset{g}{3}$, ed iscrivo sotto agli altri prodotti $\overset{D}{2}\ \overset{c}{1}\ \overset{g}{3}$. Con tali operazioni ho replicato i docati, i carlini, le grana, i calli del moltiplicando soltanto per 284 interi: devesi ora moltiplicare per i palmi, che sono fratti della canna, e per le once fratti del palmo. A tal'uopo decompongo i 5 palmi in 4 palmi, cioè in mezza canna, ed in un palmo, ottava della canna, e le 4 once in un terzo del pal-

mo, ed in primo luogo prendo la metà di tutti i docati, de' carlini, delle grana, e de' calli, che si riduce a $\overset{D}{2}\ \overset{c}{3}\ \overset{g}{9}\ \overset{c}{4}\frac{1}{2}$, che scrivo sotto gli altri prodotti, poi prendo l'ottava di esso moltiplicando, che si riduce a 5 carlini 9 grana, 10 $^1/_8$ calli, e scrivo sotto gli altri. Passo in fine a prendere il terzo dell' ottava del moltiplicando per motivo delle 4 once, e siccome l' ottava parte del moltiplicando è $\overset{c}{5}\ \overset{g}{9}$ 10 $^1/_8$ calli, così il terzo sarà 1 carlino, 9 grana, 11 $\frac{2}{3}$ calli. Ed aggiungendo tutti questi prodotti, trovasi il prodotto totale essere 1362 docati, 8 carlini, 4 grana, e calli 2 $^1/_4$.

145 Lo stesso esempio risoluto con altro metodo più facile, e breve.

Metodo breve di moltiplicazione.

ESEMPIO.

Sia da moltiplicarsi $\overset{D}{4}\quad \overset{c}{7}\quad \overset{g}{8}\quad \overset{calli}{9}$

per $\overset{c}{284}\quad \overset{P}{5}\quad \overset{O}{4}$

Riducasi il moltiplicando a grana, ed a fratti di grana, cioè a 478 grana, e 'l moltiplicatore a canne, ed a fratti di canne, il che si esegue riducendo i cinque palmi a $\frac{5}{8}$ di canna, e le 4 once in terza di un' ottava di canna, cioè in un frat-

to di fratto $\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}$, che corrisponde a $\frac{1}{24}$, che aggiunto al fratto $\frac{5}{8}$, e ridotti allo stesso denominatore, e poi addizionati, a $\frac{16}{24}$, che ridotto a minimi termini, è $\frac{2}{3}$. Laonde i fattori saranno

$$\left.\begin{array}{r} 478\,\frac{3}{4} \\ 284\,\frac{2}{3} \end{array}\right\}\text{fattori}$$

1912
3824
956
213
200
100
18 $\frac{2}{3}$
1 $\frac{6}{12}$

Prodotto 1362,84 $+\frac{1}{6}$ (D C g)

Per eseguire tale moltiplicazione, si moltiplichino prima gl' interi 478 grana per 284. Di poi si moltiplichi $\frac{3}{4}$ per 248, o sia si prendano di

questo $\frac{3}{4}$ parti, il che si ottiene moltiplicando per 3 il 284, e poi dividendo il prodotto per 4, e si avrà 213, il quale ultimo si ottiene pure, dicendo il denominatore 4 in 28 cape 7 volte, e moltiplicato 7 per lo numeratore 3, il che produce 21, si scrive in linea del 28 sotto gli altri prodotti, e poi si prenda il quarto della cifra 4 del moltiplicatore, dicendo 4 in 4 entra 1 volta, e si moltiplichi 1 per 3, e si scriva accanto al 21 a dritta sotto le unità.

Similmente si prenda da 478 $\frac{2}{3}$, cioè le $\frac{2}{3}$ parti delle centinaja, delle decine, e delle unità, e di poi si scrivano come gli altri prodotti.

Si noti il prodotto del residuo 1 per $\frac{2}{3}$, che è $\frac{2}{3}$.

In fine di moltiplichino i due fratti $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, e si avrà $\frac{6}{12}$. Riducendo allo stesso nome $\frac{6}{12}$, e $\frac{2}{3}$, e poi prendendone la somma, si avrà 1, che si scriva sotto le unità, e $\frac{2}{12}$, ovvero $\frac{1}{6}$ di residuo, che si noterà a destra del prodotto totale.

Si prenda la somma di tutti i prodotti parziali, e si avrà 1362 docati, 84 grana, ed $\frac{1}{6}$ di grano, o sia 2 calli.

146 Nella divisione di cotesti numeri possono occorrere due casi. 1.° O che solamente il dividendo sia complesso, ovvero 11° comunque sia il dividendo, il divisore sia pure complesso.

147 Caso I. Quando il dividendo è complesso, e 'l divisore non lo sia, si dividano successivamente le diverse unità del dividendo per lo divisore; e si otterrà il quoto di unità di diversa specie.

ESEMPIO

c p c m
Dividere 3845 5 7 3 *in* 79 *parti uguali*

Divid. c p o m		79 divisore
Divid. 3845 5 7 3		c. p. o. m. $48, 5, 5, 1 + \frac{24}{79}$
316		
685		
632		
53		
8		
424		
5		
429		
395		
34		
12		
68		
347		
415		
395		
20		
5		
100		
3		
103		
79		
24		

Nel quale esempio il quoto è 48 canne, 5 palmi, 5 once, 1 minuto, e $\frac{24}{79}$ di minuto. Ad ottenerlo si è prima diviso il numero 3845 canne per 79, e si è avuto il primo quoto di 48 canne. Di poi le 53 canne di residuo nel dividendo si sono ridotte a palmi, il che si è fatto col moltiplicare 53 per 8, e poi si è aggiunto 5 palmi, il che ha prodotto 429 palmi. Questi divisi per 79 han dato il secondo quoto di 5 palmi.

In seguito si sono ridotti i palmi in once, col moltiplicarli per 12. Finalmente le once si sono ridotte in minuti col moltiplicarle per 5, e poi si è avuto l'intero quoto qui sopra additato sotto del divisore.

148 Caso II. Siano ora complessi non meno il dividendo, che il divisore, e si abbia a risolvere la questione, come si vede in questo.

ESEMPIO.

Suppongansi che 48^{can}, 6^{pal}, 7^{onc}, 2^{min} *di fabbrica siano costate* 384^{doc} 2^{carl} 7^{gran} 8^{call}, *si domanda il costo di una sola canna.*

Egli è manifesto che quante canne si comprendono nel numero 84^{c}, 6^{p}, 7^{o}, 2^{m}, tante volte il prezzo della canna si contiene, nel numero 384^{d}, 2^{c}, 7^{g}, 8^{calli}. Laonde la questione riducesi a dividere questo numero per quello delle canne, e parti di essa. Ad eseguire tale divisione,

I. Riducansi i docati 384^{d}, 2^{c} 7^{g}, 8^{calli} tutti a calli, e si avranno 561132 calli al qual numero si sottoscriva 1200, che esprime il numero dei calli componenti il docato, onde la frazione $\frac{461232}{1200}$ esprimerà docati, e parti di docato.

II. Similmente riducansi le 84^{c}, 6^{p}, 7^{o}, 2^{m} in minuti, che sono 40727 minuti, cui si soscriva per denominatore 480, che disegna il numero de' minuti componenti la canna, e si avrà la frazione $\frac{40727}{480}$, che dinoterà canne, e parti di canna.

III. Si divida il primo fratto pel secondo, come fu detto (n.° 67.), e dal fratto spurio $\frac{22134336}{4887240}$ che ne sorge si ricavino prima gl' interi, che sono

docati, poi i carlini, indi le grana, ed i calli, e la frazione di calli: onde saranno 4^{d}, 5^{c}, 2^{g}, 10^{calli} + $\frac{3941040}{4887240}$.

CAPITOLO VII.

DELLA FORMAZIONE DELLE POTENZE, E DELL'ESTRAZIONE DELLE RADICI.

149 *Def.* Dicesi *potenza* di un numero il prodotto di esso numero per se stesso più volte di seguito.

150 In particolare si chiama prima potenza di un numero esso stesso. Così 6 è prima potenza di esso.

151 La *seconda* potenza, o il *quadrato*, è il prodotto del numero per se stesso, come $3\times3=9$, ove il 9 è la seconda potenza di 3, ovvero il quadrato di 3.

152 La *terza* potenza di un numero, ovvero il *cubo*, è il prodotto del numero due volte di seguito, ovvero il prodotto del quadrato pel semplice numero. Così $5\times5\times5=25\times5=125$ è cubo di 5, il quale nasce dal moltiplicare il quadrato 25 per 5. Con più proprietà la seconda potenza, e la terza chiamansi quadrato, e cubo.

153 La quarta potenza è il prodotto del cubo per lo numero semplice. Così nell' addotto esempio, il cubo di 5, che è 125 se si moltiplichi per 5, si avrà 625, che appellasi quarta potenza, o quadrato — quadrato di 5.

Così pure si pratica per la quinta, sesta potenza, e per le altre superiori.

154 *Def. Formazione della potenza* si appella il metodo che si tiene per ottenerla.

155 Se l'unità si moltiplichi più volte di seguito per se stessa, si avrà sempre 1. onde qualunque potenza di 1 è sempre 1. Il che è proprietà della sola unità, e di niun' altro numero.

156 Ecco una tavola delle prime quattro potenze di numeri da 1 fino a 9 inclusivamente.

Numeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Quarte potenze	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

157 *Def.* Si chiama *radice* di una potenza il numero, che moltiplicato un certo numero di volte, dia quella potenza. In particolare si appellano radice prima, seconda, o radice quadrata, terza, o cuba, quarta, ec. La radice prima vale quanto la potenza prima. Così il numero 3 è la radice prima, di se stesso. Il numero 3 poi è radice seconda, o quadrata in rapporto a 9, il quale è il quadrato di 3, e'l 3 è radice terza, o cuba di 27, e 27 il cubo di 3; e'l 3 è radice quarta di 81, e così di seguito.

158 L'operazione che si segue per ritrovare la ra-

dice di una data potenza chiamasi *estrazione della radice*.

159 Due sono le questioni che in questa materia si propongono. L'una diretta, l'altra inversa. La diretta è, dato un numero, ritrovare la sua potenza. L'inversa è, data la potenza, ritrovare la sua radice, o sia quel numero, che col moltiplicarlo per se stesso produca quella potenza.

160 La prima è di facile risoluzione, riducendosi a moltiplicare un numero più volte per se stesso sia intero, o pure fratto. Così il quadrato di 8 è il prodotto di 8, per 8, cioè $8\times8=64$, il cubo è $8\times8\times8=512$. Similmente il quadrato del fratto $\frac{3}{5}$ è $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$, e'l cubo è $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$, come pel prodotto de'fratti (n.° 61.)

161 La seconda quistione è più difficile, e richiede delle regole particolari, le quali affinchè siano bene stabilite, bisogna dedurle da' principj, che si contengono nella formazione del quadrato. Laonde prima mostrerò questi, poi l'applicherò all'estrazione della radice.

Principj relativi al quadrato, ed al cubo.

612 *I. Se un numero si divida il due parti: il quadrato di tutto il numero è uguale ai quadrati delle parti, e al doppio prodotto delle parti.*

ESEMPIO.

Sia il numero 18 diviso in 10, ed 8, o sia $18=10+8$. Sarà il quadrato di 18 uguale al qua-

drato di 10, al quadrato di 8, ed al doppio prodotto di 10 per 8.

Infatti si faccia il quadrato di 18 espresso così 18×18, si avrà, fatta l' operazione indicata, il numero 324. Si facciano separatamente i quadrati delle parti, e 'l doppio loro prodotto, e si esegua l'operazione così: $10 \times 10 = 100$, $8 \times 8 = 64$, $2 \times 10 \times 8 = 20 \times 8 = 160$. Si avranno tre numeri, cioè 100, 64, e 160, i quali uniti insieme danno 324.

163 *II. Se un numero sia diviso in due parti; il cubo di tutto il numero è uguale al cubo delle parti, insieme con due prodotti, cioè del triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda parte, e del triplo quadrato della seconda per la sola prima parte.*

ESEMPIO.

Sia il numero 14 diviso in 10, e 4, o sia $14 = 10 + 4$. Il cubo di 14 è uguale alla somma dei cubi di 10, di 4, del triplo quadrato di 10 moltiplicato per 4, e del triplo quadrato di 4 per 10.

Facciasi il cubo di 14, che eseguito così $14 \times 14 \times 14 = 2744$: di poi quelli delle parti cogli altri prodotti indicati nel modo seguente, cioè: $10 \times 10 \times 10 = 1000$, cubo di 10, $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubo di 4 $3 \times 10 \times 10 \times 4 = 1200$ il quale esprime il triplo quadrato di 10 per 4, $3 \times 4 \times 4 \times 10 = 480$ che esprime il triplo quadrato di 4 per 10. Si uniscano ai due cubi i due prodotti, cioè

1000
64
480
1200

Somma 2744 uguale al cubo di 18

164 *III. Se due numeri differiscano tra loro per l' unità. Il quadrato del maggiore differirà da quello del minore pel doppio della radice minore, ed* 1 *di più.*

ESEMPIO.

Siano 4, e 3 due numeri differenti fra loro per 1; e si facciano i quadrati loro, i quali sono 16, e 9. Si vede che 16 quadrato di 4 supera il 9 quadrato di 3 per 7, cioè per 2 volte il minore 3, ed inoltre 1. Vale a dire $16=9+2\times3+1$: onde $9=16-7=9$.

165 *IV. Se due numeri differiscano per* 1. *Il cubo del maggiore differirà da quello del minore per lo triplo quadrato del minore, per lo triplo dello stesso minore, e per uno di più.*

ESEMPIO.

Siano 4, e 3 differenti per 1; e si facciano i loro cubi, che sono 64, e 27, tolgasi dal 64 il 27, il residuo 37 sarà uguale ai tre, cioè $27+9+1$, cioè al triplo quadrato di 3, che è 27, al triplo di 3, che è 9, ed 1.

166 *Cor.* Adunque dato il cubo di un numero, per avere quello di un minore per 1, si tolga dal cubo maggiore la somma del triplo quadrato del minore, il triplo semplice $+$ 1, e si avrà il cubo del minore: così dal cubo di 4, che è 64, se si ... triplo quadrato di 3, che è 27, il tripl...

1 di più, che tutti fanno 37, rimarrà 27 cubo di 3, differente dal cubo di 4 per 1.

Principj relativi all'estrazione della radice quadrata, cubica ec.

166 I. La radice qualunque dell'unità è sempre 1. Così la radice quadrata di 1. è 1: lo stesso dicasi della cubica di 1, che è 1, o la quarta radice di 1, che è 1, ec.

II. Se un numero sia di una sola cifra, o di due, la sua radice quadrata sarà pure di una cifra. Così 3 è radice di 9, e 9 la è di 81. Ad estrarre la radice da una cifra, o da due si ricorre alla tavola (n.°156), nella quale, se il numero è quadrato, o cubo perfetto, si troverà al di sopra di esso nella prima linea orizzontale. Se non è esatto, si troverà pure nella tavola nella stessa linea una radice che più si approssimi al numero. Così pel primo caso, se si voglia la radice di 81, subito si trova 9 al di sopra di esso nella tavola. Se poi si vuole estrarre le radice quadrata da 95; siccome non è quadrato che nasce da uno de' numeri della prima linea, così si prenderà il più approssimante al di sotto di 95: tale sarà 81, la cui radice è 9, la quale è la più approssimante in numero intero alla vera radice di 95.

III. Se un numero abbia tre, o quattro cifre, la radice ne avrà due. Così 100, che è il più piccolo numero di quei che compongonsi di tre cifre, ha per radice 10, che è di due cifre, e così pure il nu-

mero, 9801 di 4 cifre è il massimo quadrato di un numero intero di due cifre, cioè 99. Se abbia 5 cifre un numero, o al più 6, la radice sarà di un numero, che costa di decine di migliaja, o di centinaja di migliajo. Così 99856, la cui radice è 316 è di tre cifre, e di 998001, la radice è 999 puranche di tre cifre. E così degli altri.

170 Per la qual cosa numerando le cifre di un numero, si conoscerà il numero delle cifre della radice, il quale sarà 1 pe' numeri di 1, e due cifre, sarà 2 per que' di tre, e quattro cifre; sarà 3 per quei di 5, e 6 cifre, ec., o sia le unità, e decine avranno unità per radice, le centinaja, e le migliaja avranno decine ed unità per radice, le decine di migliaja avranno centinaja con decine ed unità. E così appresso.

171 *Probl. Estrarre la radice quadrata da un dato numero.*

Dato un numero di tre cifre, estrarre da esso la radice quadrata. Costando esso di sole tre cifre, avrà per radice decine, ed unità soltanto; e la prima cifra a sinistra dinotando le centinaja, da essa converrà estrarre le decine, e nelle altre due rimanenti, unite al residuo delle centinaja che risultano dall'estrazione della radice delle 10.^{ne}, vi saranno il doppio delle decine per le unità, e 'l quadrato delle unità. Ora un tal doppio prodotto delle decine per l' unità deve contenersi o nella seconda cifra soltanto, come quella che esprime decine, o nel residuo della prima delle centinaja, unito alla stessa seconda, e non nella terza cifra, che esprime

unità soltanto. Nella terza cifra poi vi sarà il quadrato delle unità, il quale potrà essere o di semplici unità, o di decine, le quali risultano dalla seconda cifra, e dalle unità della terza cifra.

ESEMPIO.

Sia il numero 676, da cui si voglia la radice quadrata. Si separi con una virgola, o punto la cifra 6 delle centinaja dalle due a destra, e ricorrendo alla tavola, si prenda dal 6 la radice prossima 2, che esprime decine, e fattone il quadrato, che è 4, o sia 400 si sottragga da 6, e si avrà per residuo 2, ovvero 200; a questo si aggiungano le decine espresse dalla seconda cifra 7, e si avrà 270, nel quale esisterà il doppio prodotto delle decine per le unità; e poichè si hanno le decine 2, si duplichi, e si avrà 4.

Dividendo dunque 27 decine per 4 decine, si avranno 6 unità, le quali aggiunte al 2, daranno il numero 26, che sarà la radice quadrata di 676, il quale, come è chiaro contiene il quadrato delle decine 2, il doppio delle decine per le unità 6, e 'l quadrato delle unità. E questo è il metodo che deve tenersi per estrarre la radice quadrata da qualsivoglia altro numero.

,, Laonde nasce la regola: si divida da sinistra
,, a destra in classi binarie l' intero numero, e poi
,, dal primo numero di destra, sia anche una cifra, si
,, estragga la radice quadrata vera, o prossima; in-
,, di sottraggasi da quel binario il quadrato di cotesta

,, radice , e notato il residuo, vi si aggiunga il se-
,, condo numero a destra del residuo, o anche una
,, sola cifra del binario seguente, e si divida un
,, tal numero pel doppio della prima radice rinve-
,, nuta, e 'l quoto si scriva accanto alla cifra pri-
,, ma avuta. Di poi, quadrato il numero delle due
,, cifre di tal radice, si sottragga dal numero dato,
,, scrivendo però il quadrato fatto sotto le prime
,, cifre a sinistra, e notato il residuo, si abbassi
,, accanto ad esso l' altra cifra, e preso di nuovo
,, il doppio della radice delle due cifre, si divida
,, per esso quel residuo colla cifra abbassata, e si
,, avrà per quoto la terza cifra della radice, e si
,, continui come prima, finchè tutte le cifre del
,, quadrato rimangano esaurite, si avrà così la radi-
,, ce quadrata di qualunque numero. Ciò si farà
,, più chiaro ne' seguenti esempj.

ESEMPIO.

Debbasi estrarre la radice quadrata del numero 3825936 *che sia quadrato perfetto.*

Quadrato dato	3,82,59,36 1	1956 Radice
2	28 361	
38	00215 38025	
390	00 2343 3825936	
	00 00 00 00	

1.° Si disponga il quadrato come si vede, e si divida in binarj per mezzo delle virgole da destra a sinistra. Dalle cose dette (n.° 170) essendo 7 cifre nel quadrato, la radice dovrà contenere 4 cifre, o sia dovrà contenere migliaja, centinaja, decine, unità.

2.° Si estragga la radice prossima da 3, e si abbia 1 per mezzo della tavola, e si scriva a destra del quadrato; e fattone di 1 il quadrato, si scriva sotto il 3, e si sottragga da esso, si avrà 2 per residuo.

3.° A destra di tal residuo si abbassi 8, e si ha 28. Si duplichi la radice 1, e si scriva a sinistra cotesto 2, pel quale si divida 28, e si avrà 9 per quoto; un tal quoto si scriva a destra di 1, con che si ha 19 nella radice. Facciasi il quadrato di 19, il quale è 361, e si sottragga dalle prime tre cifre di sinistra, rimarrà per residuo 21.

4.° A lato del 21 si abbassi la cifra 5 del quadrato, onde si abbia 215; e duplicato il 19, si scriva 38 a sinistra di 215, e fattone la divisione per 38, si ha 5 per quoto, che si scriva a destra della prima radice 19, onde sorge una radice di tre cifre 195, il quadrato 38025 di questa si sottragga dalle cifre superiori del dato quadrato, da cui rimane 234.

5.° A dritta di 234 si abbassi 3, e duplicato il numero 195, onde si abbia 390, per questo si divida 2343 e 'l quoto 6 si scriva a lato della radice 195, onde si abbia 1956. Il suo, quadrato che è 3825936 si scriva di rincontro al dato n.°

di sopra, e si sottragga da esso. Fatta la sottrazione, si ha zero per residuo, onde si conchiude essere il numero 9956 la radice esatta di 38259З6.

ESEMPIO II.

Estrarre la radice quadrata prossima, o vera in numeri interi dal numero 8,456783.

Quadrato supposto	8,45,67,83	2908 Radice
	4	
49	445	
	441	
58	0046783	
5808	46464	
	319	

I. Disposto il quadrato presunto, come si vede, e diviso in binarj, si cominci a ricercare la radice da 8 a sinistra, la quale si scriva a destra, che sarà 2. Dipoi il quadrato 4 di essa si sottragga da 8, e resterà 4.

II. Si abbassino accanto al 4 le due cifre 45, di modo che facciano col 4 il numero 445. A sinistra di questo si scriva il doppio della radice trovata, cioè 4, e si divida 44 per il 4, il quoto 9 si ponga a canto alla radice 2, ed a canto anche al divisore 4, onde si abbia 49. Si moltiplichi 49 per 9 stesso, e 'l prodotto 441 si scriva sotto 445, da cui si sottragga, e si avrà per residuo 4.

III. A destra di 4 si abbassino le due seguenti cifre del quadrato superiore, che sono 67, onde si ha 467. Si duplichi 29, e tal doppio, che è 58 si scriva a sinistra di 467. Si divida 46 per 58, e 'l quoto zero si scriva a lato della radice, onde si abbia 290.

IV A destra di 467 si pongano le rimanenti cifre di sopra 83, onde si abbia il numero 46783. Si prenda di 290, il doppio 580, si ponga a sinistra, come si è fatto nelle precedenti operazioni. Di poi si divida 4678 per 580, e 'l quoto 8 si scriva a destra della radice, ed a destra di 580, onde si abbia il numero 5808, il quale si moltiplichi per 8 stesso, e 'l prodotto 46464 si scriva sotto del dividendo, si avrà, fatta la sottrazione, 319 di resta. Se vi fossero altri binarj si abbasserebbero, e si continuerebbe nel modo stesso; ma come non ve ne sono degli altri, l'operazione si arresta, e si giunge ad una radice prossima del dato numero espressa in interi, come è 2908.

Per comprendere la giustezza di cotesto processo, si rifletta che quando si estrae la radice dal numero 8, 45, 67, 85, diviso che sia esso in binarj, si estrae prima la radice da 8, che è 2, la quale moltiplicata per se stessa, si sottrae da 8, e da per residuo 4. Ora se si considerano le prime tre cifre 845 come quadrato, in esse vi deve essere il quadrato delle decine, il doppio di queste per le unità, e 'l quadrato delle unità, si conoscerà bene l'operazione; perciocchè la radice che si trae da 8 esprimente centinaja, è di decine, il qua-

drato delle quali, che è 4, o sia 400, tolto da 845 da di residuo 445, nel quale deve trovarsi il doppio prodotto delle decine per le unità, e 'l quadrato delle unità; da ciò è che dividesi il 44, cioè 440, che esprime il doppio delle decine per le unità, per 4 decine, e si avrà così l' altro fattore esprimente le unità. Quindi è ragionevol cosa scrivere per divisore il doppio di 2, che è 4, poi aggiungere ad esso il quoto 9, e moltiplicare 49 per 9, perchè così si ottiene il quadrato delle unità, e 'l doppio delle decine per le unità, come l' indica l' operazione, il quale prodotto di 9 per 49 devesi sottrarre soltanto da 445, e non da 845, essendosi già sottratto il quadrato delle decine 4. Lo stesso discorso vale pel resto dell' operazione. Onde il metodo usato è giusto abbastanza.

172 *Scol.* Qualora il numero dato non sia quadrato perfetto, come è il precedente, e si voglia una radice prossima alla vera, bisognerà avvicinarsi ad essa per mezzo de' decimali. Per riuscirvi è d'uopo aggiungere al supposto quadrato delle coppie di zeri, e propriamente aggiungere una, se l' approssimazione si vuole sino a decime parti dell' unità, due coppie, se sino a centesime, tre coppie, se sino a millesime, e così più coppie, se più si voglia approssimare. La ragione perchè, volendo approssimare la radice a decimi, si debba aggiungere al quadrato una coppia di zeri, che lo rende centesimo, si è che la radice de' centesimi è di decime parti, perocchè moltiplicando $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ si ha $\frac{1}{100}$: ciò vale pure per

l' aggiunta delle altre coppie, le quali, se nel quadrato sono due, cioè diecimilesimi, la radice avrà centesimi, essendo il quadrato de' centesimi di diecimilesimi, e così se sono tre, quattro, o altre. Per la qual cosa è assai giovevole ai giovanetti mostrare loro degli esempj di interi con decimali, e di semplici decimali.

ESEMPIO I.

Sia lo stesso numero di sopra, approssimare la radice sino a millesimi, o sia trovare quella radice, che è minore della vera per meno di una millesima.

	8,45,67,83,00,00,00	2908,054 Radice
	4	
49	445	
	441	
58	046783	
5808	46464	
	00 3190000	
58160	2908055	
	028197500	
	23264416	
5816104		
	04933084	

I. Si faccia l'operazione come nell' esempio precedente per gl' interi, fino a che si ottenga la radice espressa dal numero intero 2908, e si abbia di residuo 319.

II. Si abbassino accanto a questo numero 2 zeri, e duplicata la radice trovata, si trova non potersi eseguire la divisione di 3190 per 5816; laonde si scriva zero a destra della radice, e siccome questo è decimo, si ponga la virgola prima del zero, per separare gl' interi da' decimali.

III. In seguito si abbassino due altri zeri, e si duplichi 2908,0, il cui doppio sia 58160, che si scriva per divisore, e fatta la divisione, come prima, si scriva 5 centesimi alle radice, e si continui, come nell'esempio precedente, finche si giunga alla radice 2908,054 minore della vera per una millesima.

ESEMPIO II.

Sia il decimale	. . 0, 84,56,78, 81	0, 919 Radice
181	0356 181	
1829	17578 16461	
	01117	

Fatta l' operazione solita, si avrà la radice 919 millesimi, e vi rimane 1117 millesimi, ai quali aggiungendo i zeri due a due, si avranno i dieci millesimi, i centomillesimi, ec, e la radice si potrà approssimare quanto si vuole.

174 *Scol.* Nel modo stesso si può estrarre la radice da una frazione, estraendola dal numeratore, e dal denominatore, la quale sarà vera, o prossima. Da ciò nascono due casi, l' uno quando la frazione quadrata è tale si nel numeratore, che nel denominatore, l' altra quando non è. Nel primo caso si estrae la radice si dal numeratore, che dal denominatore, e la frazione risultante sarà la radice vera.

Caso I. Sia $\frac{9}{16}$ il fratto da cui vuole estrarsi la radice quadrata. Si estragga prima dal 9, e si avrà 3, poi dal 16, e si avrà 4. La frazione $\frac{3}{4}$ sarà la radice quadrata di $\frac{9}{16}$. Infatti $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Caso II. Si voglia estrarre dalla frazione $\frac{3}{5}$, che non è quadrato perfetto, la radice quadrata.

Numeratore

Denominatore

Si estragga la radice, prima dal numeratore, e poi dal denominatore col metodo solito, indi si

faccia un fratto, che abbia per numeratore la radice del numeratore, e per denominatore quella del denominatore, sarà la novella frazione la radice del fratto dato. Così nel caso presente la radice del numeratore del fratto $\frac{3}{5}$ è 1, 732, meno della vera per una millesima, quella del denominatore è 2, 236 meno della vera per una millesima; sarà la frazione $\frac{1,732}{2,236}$ la radice prossima di $\frac{3}{5}$.

174. Cotesta frazione potrà per maggiore comodo ridursi a decimale, eseguendo la divisione indicata; cioè mettendo 1,732 per dividendo, e 2,236 per divisore, il che eseguo quaggiù.

```
Dividendo 1,7320,0000   | Divisore
          16352         |  2, 336
          ------        | 0,7414 quoto
          009680
           9344
          ------
           03360
            2336
          ------
            10240
             9344
          ------
             0896
```

Fatta la divisione indicata, si è ottenuto il quoto 0,7414, cioè 7414 diecimillesimi, minore del vero per 1 diecimillesima, e col metodo dato vi si

sarebbe potuto più approssimare, ed un tal quoto esprime la radice di $\frac{3}{5}$.

175 *Scol.* I. In cotesto esempio la radice di $\frac{3}{5}$ patisce tre approssimazioni, l'una del numeratore, l'altra del denominatore, la terza del riducimento della frazione radice a decimale: sarebbe util cosa di evitare almeno un'approssimazione. A fin di riuscirvi, si moltiplichi il numeratore per lo denominatore, e questo per se stesso, si sarà con tale mezzo cambiata la frazione in un' altra eguale (n.°49.6.°), ma che ha il denominatore perfetto quadrato, ed in tal caso si eviterà un'approssimazione.

Sia di esempio la frazione $\frac{5}{6}$, di cui si voglia la radice quadrata; e si moltiplichi tanto il numeratore, che il denominatore per lo denominatore 6, si avrà $\frac{30}{36}$, che è uguale a $\frac{5}{6}$ (n.°49.6.°). Con tale apparecchio la frazione proposta si è trasmutata in un' altra equivalente, ma che ha il denominatore un quadrato perfetto. Se dunque si estragga la radice sì dal numeratore, che dal denominatore, si eviterà l'approssimazione del denonominatore, essendo esatta la sua radice, che è 6. Pertanto si estragga dal numeratore colla seguente operazione la radice.

	30,00,00,00 25	5,477 ec.
104	50,0 416	
1087	0840,0 7609	
10947	07910,0 76629	
	02471	

Ed in oltre si estragga la radice dal denominatore, che è 6, si avrà il fratto $\frac{5,477\ ec}{6}$, che esprime la radice di $\frac{5}{6}$, la quale radice ridotta a decimale, da 0, 9128.

176 *Scol.* II. Se si dia un numero intero unito ad una frazione, e si volesse la radice quadrata dalla loro somma, bisognerà ridurre ad un fratto spurio l'intero col fratto, e poi estrarre da tal e fratto, col metodo esposto, la radice.

Sia di esempio $35 + \frac{3}{5}$, da cui si voglia la radice quadrata.

Si riduca l'intero 35, e 'l fratto $\frac{3}{5}$ ad un

solo come $\frac{178}{5}$ (n.° 57) poi si estragga la radice si dal numeratore, che dal denominatore, praticandovi la preparazione dal (n.° 175), onde divenga $\frac{890}{25}$, sarà la radice di questo uguale a quella di $35 + \frac{3}{5}$

177 *Scol.* III. Da una frazione che non sia quadrato perfetto si può ottenere la radice prossima, eseguendo prima la divisione che essa indica, e portando l'approssimazione sino al doppio numero de' decimali che si vogliono nella radice; di poi dal quoto ottenuto se ne estragga la radice, come non avesse decimali; e quando si sarà ritrovata, separinsi tante cifre decimali, quante sono la metà di quelle del quoto, sarà la radice di una comoda approssimazione. Così se si abbia la frazione $\frac{5}{9}$ di cui si voglia la radice sino a millesimi: si divida 5 per 9 con sei decimali, vale a dire convertendo 5 in 5,00,00,00: questo diviso per 9 darà per quoto 0, 555555, la cui radice prossima è 0,745.

Principj relativi all' estrazione della radice cuba.

178 Estrarre la radice cuba da un numero è trovare un numero, che moltiplicato pel suo quadrato produca o il numero, di cui vuolsi la radice cuba, o il massimo cubo, che in quello si contiene

179 La radice de' numeri espressi da una, sino a tre cifre si rinviene nella tavola (n.º 156), qui trattasi della radice di que' numeri, che non sono nella tavola, cioè di que' che costano di più di tre cifre.

180 Ogni numero minore di 1000 ha una sola cifra per sua radice cuba. Così il numero 729, che è di tre cifre, ha 9 per radice cuba; 1000 poi ha 10 per radice cuba, cioè due cifre, ha similmente due cifre il numero 99, che è radice cubica di 970299 composto di sei cifre, nel che si vede che ogni ternario di cifre nel cubo da 1 cifra nella radice, ed essendovi tra 970299, e 1000 de' cubi intermedj, vi saranno pure delle radici tra 99, e 10 anche di due cifre, mentre i cubi possono avere quattro, cinque, e sei cifre: se il cubo passi le sei cifre, senza oltrepassare le nove, la sua radice ne avrà tre, e così di seguito. Laonde ogni radice cuba di un numero espresso da più di tre cifre sino a sei sarà composta di decine, e di unità, se di un numero di 7 cifre sino a 9, la radice avrà centinaja, decine, ed unità, e così appresso. Vediamolo negli esempj.

ESEMPIO I.

Estrarre la radice cuba dal numero 34567, o dal più gran cubo che in esso si contiene

Cubo supposto	34,567	32 radice cuba
	27	
27	75,67	
	5768	
	1799	

Il numero 34567 essendo composto di cinque cifre, la sua radice cuba avrà necessariamente due cifre (n.° 180): essa radice dunque conterrà delle decine, e delle unità; e'l numero proposto, per quel che si è detto (n.° 163) avrà il cubo delle decine, il triplo quadrato delle decine per le unità, il triplo quadrato delle unità per le decine, e'l cubo delle unità. Ora il numero 34567 è uguale a 34000 + 567; ed il cubo delle unità comprendesi nelle tre cifre 567 (n.° 180): dunque il cubo delle decine conterrasi nel 34, o sia 34000. Separo perciò con una virgola le tre ultime cifre a destra delle due prime, di maniera che risultino due classi.

Ciò posto coll' ajuto della tavola (n.° 156) traggo la radice cuba dal più grande cubo contenuto in 34, che è 3, che scrivo a destra del cubo intero. Prendo il cubo di 3, e lo sottraggo da 34, e mi resta 7

A lato di 7 abbasso il ternario 567, ed ho il numero 7567. Cotesto numero deve contenere il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità; il triplo quadrato delle unità per le decine, ed il cubo delle unità. Ma il numero 7567 è uguale a 7500, più 67; e'l cubo delle unità dovendosi contenere nelle due cifre 67, dovranno gli altri due prodotti testè indicati ritrovarsi nelle due cifre 75, osia nel numero 7500. Laonde, se si divida 75 per lo triplo quadrato delle decine 3 di già trovate, si otterrà per quoto la cifra delle unità. Facciasi, e si otterrà 2, che io scrivo a destra di 3. Adunque la radice cuba del numero 34567, o del più gran cubo contenuto in esso, è 34.

Per provare questa cifra, eseguo separatamente i tre prodotti indicati, che debbono trovarsi in 7567, cioè il triplo quadrato delle decine per le unità 2, che è 5400, il triplo quadrato delle unità per le decine, che è 360, e finalmente il cubo delle unità, che è 8. Unisco questi tre prodotti; e siccome la loro somma 5768 è minore di 7567, conchiudo essere la cifra 2 buona. Sottraggo poi 5768 da 7567, ed ho di residuo 1799, ciò che mi fa conchiudere il numero 34567 sorpassare il cubo di 32 per 1799. Questo stesso metodo può praticarsi per estrarre la radice da' numeri anche maggiori di questo, come vedremo nel seguente esempio.

Potevasi anche, ritrovato il 2, cubando il 32, e 'l cubo sottrarlo dal totale 34567, e così fare, se altre classi vi fossero, ma in un numero maggiore.

ESEMPIO II.

Estrarre la radice cubica dal numero composto 84567834 , *ovvero dal più gran cubo che vi si contiene ?*

Cubo supposto	84,567,834	438 Radice cuba
	64	
48	205	
	79507	
5547	050608	
	84027672	
	00540162	

Il numero 84567834 essendo espresso da più di tre cifre, la sua radice cuba dovrà avere più di una cifra, e quindi avrà delle decine, e delle unità; ma queste decine potranno esser composte di più di una cifra anch'esse; se noi separiamo le tre ultime cifre a destra con una virgola, perchè il cubo delle unità deve avere al più tre cifre, vi rimarrà verso sinistra il numero 84567, nel quale si conterrà il cubo delle decine della radice. Io opero su questo numero, come se esistesse solo, e fo astrazione dell' ultimo ternario 834.

II. Siccome il numero 84,567 è espresso da più di tre cifre, la sua radice ne avrà più di una,

che conterrà perciò le decine, e le unità. Separiamo verso destra le tre ultime cifre, rimarrà a sinistra 84, che contiene il cubo delle decine della radice del numero parziale 84567. Si continuerà la medesima divisione in ternarj, andando da destra a sinistra, se il numero, di cui si vuole la radice, sia di un gran numero di caratteri.

Ciò posto coll' ajuto della tavola (n.° 156) prendo il massimo cubo che si contiene in 84, il quale è 64, la cui radice cubica è 4, e la scrivo a destra della linea che chiude il cubo proposto. Fo il cubo di 4, che è 64, e lo sottraggo da 84, ed ho di residuo 20; ed a lato di 20 abbasso il ternario 567, onde si ha il numero 20567. Questo numero deve contenere il triplo quadrato delle decine trovate per le unità, il triplo quadrato delle unità per le decine, e 'l cubo delle unità. Ora il triplo quadrato delle decine per le unità deve ritrovarsi nelle prime tre cifre, dovendosi nelle altre due ultime trovare il cubo delle unità, le quali perciò possono rimanere sopra, senza abbassarle; perciò delle decine ottenute prendo il triplo quadrato che è 48, e per questo divido 205: il quoto 4 in disparte insieme col 4 di prima, onde ho 44. Fo il cubo di 44, il quale è 85184, e trovando essere maggiore di 84567, da cui devesi sottrarre, conchiudo non essere buono il quoto 4. Per non rifare il cubo di 43 minore di 44 per 1, applico il principio nel (n.° 165), ed ottengo così il cubo di 43, che è 79507, che scrivo di rincontro al cubo supposto, e lo sottraggo da esso, mi resta il numero 5060.

III. Abbasso, come ora ha fatto l' ultimo ternario, onde col residuo ho 5060834. Considerando il numero 43 come fossero decine della radice del numero totale 84567834, il numero 5060834 deve contenere il triplo quadrato delle decine per le unità, che si cercano, più il triplo quadrato delle unità per le decine, più il cubo delle unità. Il primo prodotto deve avere due classi di cifre alla sua destra, essendo l' altra destinata al cubo delle unità; quel prodotto dunque conterrassi nel numero 50608. Dividendo dunque cotesto numero per 5547, che è il triplo quadrato delle decine 43, si avrà per quoto 8. Fo il cubo di 438, che riesce uguale a 84027672, e lo sottraggo dal cubo supposto 84567834, e mi resta 540162. Siccome nel cubo supposto non vi sono altri numeri ad abbassare, così l' operazione non si porta avanti per ottenere altre cifre intere per la radice. Può però la radice trovata essere approssimata a quella del numero dato per mezzo de' decimali, ma ciò l' eseguirò in un' altro esempio.

181 *Scol*. I. È necessario però avvertire, che volendo approssimare una radice cubica per via di decimali, fa d' uopo aggiungere a destra del cubo supposto tanti ternarj di zeri, quante saranno le cifre decimali che si vorranno nella radice; e se il cubo abbia già de' decimali, converrà dividere questi ternarj separatamente dagli interi, e se non basti il numero delle cifre a completare i ternarj, si aggiungeranno a destra de' zeri, i quali per lo n.° 117 non alterano il valore dell' espressione decimale.

182. *Scol.* II. Ma perchè mai, dirà taluno, debbonsi apporre le classi di zeri a tre, a tre a destra del numero, di cui vuolsi approssimare la radice? La ragione n'è chiara abbastanza. Imperciocchè que' tre zeri esprimono millesimi nel cubo, ed i millesimi hanno per radice cuba i decimi. Infatti $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$. Così pure, se si vogliono centesimi nella radice, nel cubo vi bisognano milionesimi, perchè $\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{1000000}=0{,}000001$, e così se si voglia maggiore approssimazione, converrà sempre aggiungere per ogni una nella radice tre zeri al supposto cubo.

ESEMPIO.

Estrarre la radice cuba da 38, che non è cubo perfetto, e procurare che non differisca dalla vera radice di un millesimo

Perchè la radice cubica di 38 deve contenere de' millesimi, o sia tre cifre decimali, il cubo perciò dovrà contenere 9 cifre decimali, o sia migliaja di milionesimi. Adunque, invece di scrivere 38, scriverò 38,000,000,000, che in sostanza vale lo stesso (n.° 117). Indi, sopprimendo la virgola, estraggo al solito la radice cuba dal numero 38000000000, come fosse intero, e considerando che il cubo supposto, coll'aggiunta de' zeri, è divenuto mille milioni maggiore, onde la radice cubica è mille volte maggiore della vera, perciò a ridurla

al giusto, bisogna dividerla per 1000, o sia separare verso destra tre cifre decimali.

Cubo supposto	38,000,000,000	3,361 Radice
	27	
27	110	
	35937	
3267	020630	
	37933056	
338688	669440	
	37966934881	
	00033065119	

La radice dunque di 38 è prossimamente 3,361. Nel modo stesso si opererà per estrarre la radice cuba da un' intero con decimali, come in questo.

Esempio, che contiene soltanto il risultato.

Cubo supposto 87,300,000,000. Radice 3,855.

183. *Scol.* III. Se sia un decimale, da cui vogliasi la radice cubica, si otterrà nel modo stesso, come per gl' interi si è fatto.

ESEMPIO

	0,084,560,000,	0,438 Radice
	64	
64	0205	
	79507	
5547	050530	
	84027672	
	00532328	

La radice cuba di 8456 centomilesimi è 438 millesimi, minore della vera per meno di una millesima.

Estrazione delle radici cube de' fratti.

184. Si fece conoscere (n.° 160) che il cubo di una frazione si ottiene facendo il cubo del numeratore, e del denominatore. Viceversa la radice cuba di una frazione si ha estraendola dal numeratore, e dal denominatore, la quale sarà anch'essa una frazione, il cui numeratore esprime la radice cuba del numeratore del cubo, e 'l denominatore la radice cuba del denominatore di quello. Per esempio la radice cuba di $\frac{27}{64}$ è $\frac{3}{4}$, quella di $\frac{343}{729}$ e $\frac{7}{9}$; perciocchè si quella $\frac{3}{4}$, che questa cubate danno i loro cubi.

185 *Scol.* Nell' estrarsi le radici cubiche dai fratti possono avvenire due casi, come per la radice quadrata, cioè: o che il denominatore del cubo sia cubo perfetto, o che non sia tale.

Caso I. Estrarre la radice cubica da un fratto, allorchè il denominatore è cubo perfetto.

Se ciò sia, si tragga la radice cuba, prima dal numeratore, esatta, ovvero prossima, secondocchè esso sia cubo perfetto, o nol sia; di poi si estragga dal denominatore; ed il fratto che abbia per numeratore la radice cuba del numeratore del fratto dato, e per denominatore la radice del denominatore di quello, sarà la radice cuba richiesta. Sia per esempio il fratto $\frac{468}{512}$ di cui si vuole la radice cuba. Si estragga prima dal numeratore la radice prossima 7,708; di poi estraggasi da 512 la radice, che è esattamente 8, e sarà il fratto $\frac{7,708}{8}$ la radice cubica di $\frac{468}{512}$ approssimata sino a millesimi; e dividendo il numeratore 7,708 pel denominatore 8, si avrà espressa in decimali, e sarà 0,963, prossima alla vera.

Caso II. Estrarre la radice cubica da un fratto, di cui nè il numeratore, nè il denominatore è cubo perfetto.

Si moltiplichi sì il numeratore, che il denominatore per lo quadrato del denominatore, il che non muta il valore del fratto (n.° 49 6.°): si avrà un altro fratto, il cui denominatore è cubo perfetto; e ad estrarre la radice da cotesto nuovo fratto si perviene col metodo del caso precedente. Sia per esempio la frazione $\frac{5}{9}$, di cui si vuole

la radice cuba, il cui denominatore non è cubo perfetto: si moltiplichi sì 9, che 5 per lo quadrato di 9, e si avrà il fratto $\frac{405}{729}$, ed estratta la radice prossima del numeratore, la quale è $\frac{7,3.\ ec.}{9}$. che si può, come nel caso primo, ridurre ad un sol decimale.

186 *Scol.* Se vi sia un' intero con un fratto, da cui si voglia estrarre la radice cuba, si ridurranno l' intero e 'l fratto ad un fratto spurio, e si estrarrà la radice cubica, come da un fratto. Così $4+\frac{2}{9}$ si riduce a $\frac{38}{9}$, da cui si può estrarre la radice cuba.

187 *Scol.* II. Finalmente vi è un' altro mezzo di estrarre la radice cuba da un fratto. Esso si riduce a dividere prima il numeratore pel denominatore, approssimando il quoto con un numero di decimali triplo di quello, cui vuolsi approssimare la radice; poi estrarre da tal quoziente la radice cubica. Così per esempio avendo la frazione $\frac{5}{9}$ di cui si dimanda la radice cuba con tre cifre decimali. Si scriva così $\frac{5,000000000}{9}$; ed effettuendo la divisione, si abbia il quoto prossimo 0,555555555, di cui la radice cuba prossima è 0,822.

188 *Cor.* Da tutto ciò apparisce, che potendosi approssimare il quoto quanto si vuole, così pure la radice può appressimarsi alla vera.

CAPITOLO IX.

DELLE RAGIONI, E PROPORZIONI DEFINIZIONI.

189 Le grandezze, o numeri si dicono *commensurabili*, quando una medesima grandezza, o numero le misura; o sia quando hanno una comune *aliquota*. Così i numeri 17, e 43 sono commensurabili, servendo loro di misura l' unità, la metà di questa, la terza, la quarta, ec. *Incommensurabili* sono quelle grandezze, o numeri, fra quali non v' è misura comune, come fra 5, e la radice di 2, de' quali abbenche 5 abbia delle aliquote, come 1, e le frazioni sue, pure la radice di 2 non ha aliquota nè di se stessa, nè comune con quello, giacchè la radice del 2 non si ottiene esattamente, ma per approssimazione. Però della radice del 2 si può prendere tale parte piccola, che sia aliqua sua, e del 5. In tal modo si diranno commensurabili, ma non a rigore.

190 *Ragione* è un rapporto di due grandezze dello stesso genere, per quello che riguarda la grandezza. Cotesto rapporto consiste nell' indagare quante volte l' una contiene l' altra, o quanto l' una eccede l' altra. Quando si osserva la capienza dell' una grandezza nell' altra, la ragione dicesi *geometrica*, quando la differenza dell' una sull' altra, si chiama *aritmetica*. Per esempio la ragione fra 12, e 3 è geometrica, quando si riguarda il numero di volte che il 12 contiene il 3, sarà aritmetica, se si riguarda l' eccesso di 12 sopra 3. Si l' u-

no, che l'altro risultato si appella *quantità*, o *denominatore*, o *esponente della ragione*, che nel primo caso è 4, essendo 4 il quoto di 12 per 3, nel secondo è 9, essendo 9 l'eccesso di 12 sopra 3. I numeri tra quali esiste il rapporto, ovvero la ragione, si chiamano termini della ragione, e 'l primo dicesi antecedente, il secondo conseguente. Così nella ragione di 12 a 3, il 12 e 'l 3 sono i termini della ragione, e 'l 12 è l'antecedente, il 3 il conseguente. La ragione s'indica con due punti verticali. Così 12 : 3.

191. *Scol.* Siccome la ragione geometrica consiste nel quoto dell'antecedente pel conseguente, e ad ottenere il quoto è d'uopo della divisione, e le frazioni non sono altro che divisioni indicate; e la ragione fra due numeri equivale anche alla divisione dell'antecedente pel conseguente, o sia ad un fratto, il cui numeratore è l'antecedente, il denominatore il conseguente. Così la ragione di 9:3 è la stessa che la frazione $\frac{9}{3}$. Del pari la ragione aritmetica corrisponde alla sottrazione, come la ragione aritmetica fra 7 e 3 è 7. 3 $= 7-3 = 4$.

192 *Def.* La ragione geometrica è o *semplice*, o *composta*, semplice è il paragone di due grandezze, composta poi è il paragone de' prodotti dei termini di più ragioni semplici tra loro, Così 3 : 5 è ragione semplice, ma 3×8×6:4×2×6 è composta delle ragioni 3:4,8:2,7:6.

193. *Def.* Se due ragioni uguali compongano una ragione, la composta dicesi *duplicata* di una, se sono tre ragioni uguali, la composta si dice *triplicata*, e così di seguito. Così componendo le ragioni uguali 8:4,6:3 si ha 48 : 12, che chiamasi duplicata di 8 : 4, essendo il rapporto di 48: 12 uguale a quello di 8 : 4 moltiplicato per 2, e così 8:4,6:3, 10:5, composte, danno 480:60, che è triplicata di 8:4, essendo il quoto di 480 per 6 uguale a quello di 8:4 moltiplicato per 3.

194. *Cor.* Essendovi una esatta corrispondenza tra la ragione geometrica, e la frazione che la rappresenta, ne segue che tutte quelle operazioni, che si fanno sulla frazione, le quali la rendano maggiore, minore, o invariabile, possono pur praticarsi su' termini della ragione, e li faranno subire le stesse mutazioni. Laonde, come nella frazione, moltiplicando, o dividendo i suoi termini, diviene maggiore, o minore, o eguale ad essa stessa. Del pari la ragione diverrà maggiore, o minore, o la stessa, moltiplicandosi, o dividendosi i suoi termini. Così la ragione di 8:4 diverrà maggiore moltiplicando 8 per 2, onde nasce 16 : 4, come per lo contrario diviene minore, dividendo 8 per 2, onde viene 4:4, e così se si moltiplica sì 8, che 4 per 2 diverrà 16 : 8, che è la stessa di 8:4, essendo uguali i quoti 2, e 2.

195. *Cor.* II. Dalla stessa corrispondenza, che regna tra la ragione, e la frazione nasce la ragione composta, che è il prodotto delle ragioni semplici : essa riducesi a moltiplicare le frazioni tra loro

o sia gli antecedenti tra loro, ed i conseguenti tra loro. Così le semplici 7:3,5:2,9:6 si compongono, col moltiplicare prima gli antecedenti, e poi i conseguenti, vale a dire 7×5×9:3×2×6, che eseguite le moltipliazioni indicate, sarà 315 : 36 la ragione composta dalle semplici 7:3,5:2,9:6.

196 *Def.* La *proporzione* è l'uguaglianza delle ragioni, ovvero delle frazioni. Così le due ragioni uguali 12:3,16:4 costituiscono una proporzione, che si disporrà in questo modo 12:3::16:4, o pure $\frac{12}{3}=\frac{16}{4}$. Il 12, e 'l 16 sono gli antecedenti, 4, e 4 sono i conseguenti. Sì quelli, che questi si chiamano grandezze *omologhe*, o *analoghe*. Essa è o *continua*, o *discreta*, discreta è quella che costa di quattro termini diversi, come è l'addotta 12:3::16:4, la continua costa di tre, come 8:4:2, che è la stessa di 8:4::4:2, ove il conseguente 4 della prima ragione è identico all'antecedente 4 della seconda ragione, e perciò contiene pure quattro termini.

197. *Scol.* I termini di una proporzione sogliono andare soggetti a delle trasposizioni, le quali vengono indicate con vocaboli particolari. Tali trasposizioni si riducono alle seguenti: *invertendo*, *permutando*, *componendo*, *dividendo*, *convertendo*

198. Invertendo è passare il conseguente per antecedente, e l'antecedente per conseguente.

199. Permutando è passare per conseguente della prima ragione l'antecedente della seconda, ed il conseguente della prima ad antecedente della seconda ragione.

200 Componendo è prendere per antecedente, la somma dell'antecedente, e conseguente, e paragonarla al conseguente.

201. Dividendo è prendere l'eccesso dell'antecedente sul conseguente, e paragonarlo al conseguente.

202 Covertendo è prendere l'antecedente, e riferirlo al suo eccesso sul conseguente.

ESEMPIO.

Sia la proporzione 12:4::15:5
Sarà
Invertendo 4:12::5:15.
Permutando 12:15::4:5
Componendo 12+4:4::15+5:5
Dividendo 12—4:4::15—5:5
Convertendo 12:12—4::15:15—5

203. *Post.* (8:9) (5:7) (11:4) esprime il prodotto delle ragioni di 8:9, di 5:7, di 11:4, ec.

204 *Teor: Se in mezzo a due numeri si scrivano degli altri, quanti se ne vogliono, il primo serberà all'ultimo ragion composta del primo al secondo, del secondo al terzo, e così di seguito, sino all'ultimo.*

Siano posti tra 8, e 4 i numeri 9,7,5,3, sarà 8:4::(8:9) (9:7) (7:5) (5:3) (3:4).

A dimostrarlo. Si scriva la ragione di 8:4 in modo di frazione, come $\frac{8}{4}$, e si compongano le cinque ragioni racchiuse nei vincoli, come fu detto

(n.° 203), onde si abbia l'indicazione del prodotto de' numeratori, e de' denominatori, cioè sarà $\frac{8}{4}$ da una parte; $\frac{8\times9\times7\times5\times3}{9\times7\times5\times3\times4}$ dall' altra, siccome la prima frazione è uguale alla seconda, per essersi nella seconda moltiplicanto si il numeratore 8, che il denominatore 4 per lo stesso prodotto $9\times7\times5\times3$, il che non muta il valore del fratto $\frac{8}{4}$ (n.° 49. 6.) così la ragione di $8:4 = (8:9)\,(9:7)\,(7:5)\,(5:3)\,(3:4)$, che è composta da' numeri posti fra 8, e 4.

205. *Cor.* Se tra due numeri se ne metta un altro, onde coi due si abbia una proporzione continua, come $8:4:2$, il primo starà all'ultimo in duplicata ragione del primo al secondo, o del secondo al terzo. Imperocchè $\frac{8}{2}=\frac{8}{4}\times\frac{4}{2}$, ma $\frac{8}{4}$ è uguale a $\frac{4}{2}$, perciò $\frac{8}{2}=\frac{8}{4}\times\frac{8}{4}=\frac{64}{16}$; ma $\frac{64}{16}$ contiene un quoto doppio di $\frac{8}{4}$, o di $\frac{4}{2}$, perciò si chima ragione duplicata, ovvero del quadrato del primo al quadrato del secondo, essendo 64 quadrato di 8, e 16 quadrato di 4, o come il quadrato del 2 al quadrato del terzo. Così avviene se siano quattro numeri continuamente proporzionali, come $8:4:2:1$, sarà $8:1$ in ragion triplicata di $8:4$:, cioè sarà $\frac{8}{1}=\frac{8}{4}\times\frac{8}{4}\times\frac{8}{4}=\frac{512}{64}$, cioè sarà il primo all' ultimo, come il cubo del primo al cubo del se-

secondo, o come il cubo del secondo a quello del terzo, o come il cubo del terzo a quello del quarto. E così si verificherà per i quadrato — quadrati, e per le potenze superiori, se i numeri siano più di 4, e continuamente proporzionali.

206 *Def.* Se vi siano due ragioni, e l' antecedente della prima stia al suo conseguente, come l' antecedente della seconda al conseguente di essa, si dirà la prima diretta della seconda. Così 8:4:: 6: 3 si dirà 8: 4 direttamente come 6: 3. Se poi si abbiano le due ragioni 6:12, ed 8:4 si dirà la prima 6:12 inversa di quella di 8:4: cioè bisogna che la seconda s' inverta per essere uguale alla prima, onde si avrà 6:12::4:8, e costituiranno una proporzione.

207. *Teor. Se quattro numeri siano proporzionali, il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' medj.*

Siano 8:4::6:3, sarà $8\times3=4\times6$.

Si scrivano le due ragioni come fratti, cioè $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$. Ridotti allo stesso denominatore, si avrà $\frac{8\times3}{12}=\frac{4\times6}{12}$; e moltiplicando sì il primo, che il secondo per 12, si avrà $\frac{8\times3\times12}{12}=\frac{4\times6\times12}{12}$, e ridotti a minimi termini, cioè dividendo sopra e sotto per 12, si avrà $8\times3=4\times6$, cioè il prodotto degli estremi 8, e 3 uguaglia quello de' medj 4, e 6. C. B. D.

209. *Corol.* Se siano tre termini continuamente proporzionali, il prodotto degli estremi uguaglierà il quadrato del medio. Siano 8:4:2, cioè 8:4::4:2, sarà $8\times2=4\times4$, ed essendo $4\times4=16$ il quadrato del medio 4, sarà vero che il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del medio.

208 *Teor. E se il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, i termini saranno proporzionali.*

Sia il prodotto di $8\times3=6\times4$, sarà 8:4::6:3. Imperocchè, divisi cotesti prodotti per lo prodotto 3×4, si avrà $\frac{8\times3}{3\times4}=\frac{6\times4}{3\times4}$, che ridotti a minimi termini sarà $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$, e passando i fratti a ragioni, sarà 8:4::6:3. C. B. D.

210 *Scol.* Dalla dimostrazione del *Teor.* si rileva, che per conoscere se due ragioni siano uguali, bisogna ridurle a fratti, e poi ridurle allo stesso denominatore, se non l' abbiano, indi osservare i numeratori, i quali se siano eguali, le frazioni il saranno pure, ed altresì le ragioni. Così se si voglia sapere se le due ragioni di 9 : 7, e 5 : 4 siano uguali, o disuguali, si scrivano così $\frac{9}{7}$, e $\frac{5}{4}$; riducansi allo stesso denominatore, si avranno le due frazioni $\frac{4\times9}{28}$, e $\frac{5\times7}{28}$, o sia $\frac{36}{28}$, e $\frac{35}{28}$, ove si vede essere $\frac{36}{28}$ maggiore di $\frac{35}{28}$, essendo il numeratore 36 maggiore di 35, e quindi le ragioni 9:7, 5:4, da cui derivano, saranno disugua-

li, e maggiore sarà 9:7, per essere l'equivalente $\frac{36}{28}$ maggiore di $\frac{35}{28}$ equivalente a $\frac{5}{4}$.

211 *Teor. Due frazioni sono fra loro nella ragione composta diretta de' numeratori, ed inversa de' denominatori.*

Siano le frazioni $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{6}$, esse saranno in ragione composta di 3 a 5, e di 6 a 4, cioè $\frac{3}{4}$ è $\frac{5}{6}$ :: (3:5) (6:4). Si esegua la divisione delle due frazioni (n.° 67), e si avrà $3\times6:4\times5$. Ora il prodotto primo sta al secondo in ragion composta di 3:5, e di 6: 4, perciò starà $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$ :: (3:5) (6:4).

212. *Corol.* Se i numeratori sono uguali saranno soltanto nell' inversa de' denominatori, e se uguali questi, saranno fra loro nella diretta di numeratori.

213 *Probl. Dati i tre numeri* 12, 4, 15, *è d'uopo trovare il quarto proporzionale.*

Si dispongono i numeri così 12:4::15, e sia x il quarto termine ignoto. E poichè si è dimostrato (n. 207) che il prodotto degli estremi uguagli il prodotto di termini medj, quando i numeri siano proporzionali, sarà perciò $12\times x=4\times15$, e si è dimostrato (n. 38) che dividendo il prodotto per uno dei fattori si ha l' altro: dividendo perciò il prodotto 4×15, o sia 60 pel fattore 12, si avrà l' ignoto

x, che sarà eguale a $\frac{60}{12} = 5$, onde x, che è il quarto proporzionale è uguale a 5, e si avrà perciò 12:4::15:5.

214. *Scolio.* Potrebbe l' x occupare ciascuno de' posti occupati dagli numeri, ed in ciascun di quei casi sempre si rileverà l' ignota x. Se sia così disposta la proporzione.

1.° . . x: 15::4:12, o così

2.° . . 15:x::12:4, o infine

3.° . . 4:12::x:15. Imperciocchè in tutti i casi si ha l' x, moltiplicando 4×15 dividendosi per 12, come nel problema.

215. *Probl: Dati due termini trovare il terzo proporzionale.*

Siano due numeri 12:6 bisogna trovare il terzo proporzionale, talchè sia 12:6:x.

Cotesto problema si riduce a trovare il quarto, perocchè la proporzione deve essere così 12:6::6:x e per avere l' x fa d' uopo moltiplicare i due medj 6, e 6, o sia fare il quadrato di 6, e dividendolo per 12, e si avrà $\frac{6 \times 6}{12} = 3$: laonde, sarà 3 il terzo, e la proporzione sarà 12:6:3, che è continua.

216. *Probl. Dati due numeri trovare il medio proporzionale*

Siano due numeri 18, e 2, ritrovare il medio proporzionale geometrico.

Sia x cotesto medio, la proporzione sarà così espressa 18:x::x:2. E si è dimostrato essere il prodotto degli estremi uguale al prodotto de' medj,

sarà 2×15 uguale al prodotto di x per x, o sia al quadrato di esso, che è x per x, che è x quadrato = 36, e quindi la radice x è uguale alla radice di 36, cioè il medio x sarà = 6. Laonde si avrà la proporzione continua 18:6::6:2.

217. *Teor. Se quattro numeri siano proporzionali, o che s' invertano, o che si compongono, o che si dividano, o che si permutino, o che si convertano, saranno proporzionali.*

Siano i numeri proporzionali 12:3::8:2 : dico essere vero l' enunciato.

Primieramente è chiaro che invertendo rimangano proporzionali, poichè così si ha 3:12::2:8, ed il 3 cape in 12 4 volte, il 2 quattro volte in 8, o pure ridotti a fratti, ed a minimi termini si avrà $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Componendo rimangano proporgionali. Poichè si avrà 12+3 : 3:: 8+2 : 2, ed è chiaro che siano in proporzione, comprendendosi ciascun conseguente 3, e 4 una volta di più nè rispettivi antecedenti, che divengono 15, e 10.

Dividendo rimangono pure proporzsonali, poichè si avrà 12—3:3::8—2 : 2, in che i conseguenti 3, e 2 comprendonsi una volta di meno in ciascuno degli antecedenti 12—3, che è 9, e 8—2, che è 6

Permutando rimangono anche proporzionali, si ha 12:8::3:2, o sia $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ il che si vede chiaro riducendo a minimi termini $\frac{12}{8}$, che diviene $\frac{3}{2}$

Convertendo sono anche proporzionali. Perciocchè sarà 12: 12—3:: 8: 8—2, o sia 12: 9:: 8: 6, che si riduce a 4: 3:: 4: 3, dividendo sì l'antecedente, che il conseguente di ciascuna ragione per lo stesso numero, il che non cambia il valore (n.° 194). C. B. D.

218. *Se quattro numeri siano proporzionali, sarà la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti, come la differenza di quelli alla differenza di questi.*

Sia 12: 3:: 8: 2 sarà 12+8: 3+2:: 12-8: 3—2, o sia 20: 5:: 4: 1. È chiaro come nel teorema precedente. C. B. D.

219. *Teor. Le parti sono tra esse come i loro egualmente moltiplici.*

Sia la ragione di 4: 2, ed i loro egualmente moltiplici 20, e 10, sarà 4: 2:: 20: 10. Perocchè si è dimostrato (n.° 194), se si moltiplichi sì l'antecedente che il conseguente per la stessa numero, non si altera il rapporto. C. B. D.

220. *Teor. Se vi siano più ragioni uguali, sarà la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti, come un'antecedente ad un conseguente.*

Siano le ragioni uguali 12: 4, 9: 3, 15: 5.

Sarà 36: 12:: 12: 4, o come 9: 3, o 15: 5.

Imperciocchè comprendendosi ciascuno de' tre numeri 4,3,5 egual numero di volte ne' tre numeri 12,9,15, altrettante fiate la somma 12 de' primi tre, si comprenderà nella somma de' secondi uniti insieme. C. B. D.

221. *Teor. Se quattro numeri siano propor-*

zionali, i quadrati loro, i cubi, i quadrato-quadrati, ec. saranno pure proporzionali.

Siano i numeri 8: 4 :: 6 : 3 proporzionali: dico il quadrato di 8 essere al quadrato di 4, come il quadrato di 6 al quadrato di 3, e così pei cubi, ec. cioè sarà 64: 16 :: 36 : 9 pei quadrati, 512: 64:: 216 : 27 pei cubi, ec.

Imperciocchè la proporzione di 8 : 4 :: 6 : 3 si può esprimere così $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$: moltiplicando questi due fratti uguali per due uguali fratti, rimarranno uguali, se per tre, rimarranno sempre uguali, cioè $\frac{8\times8}{4\times4}=\frac{6\times6}{3\times3}$, $\frac{8\times8\times8}{4\times4\times4}=\frac{6\times6\times6}{3\times3\times3}$, $\frac{8\times8\times8\times8}{4\times4\times4\times4}=\frac{6\times6\times6\times6}{3\times3\times3\times3}$; e la prima esprime i quadrati, la seconda i cubi, la terza i quadrato-quadrati.

Laonde se quattro numeri sono proporzionali, i loro quadrati, o la duplicata; i cubi, o triplicata; i quadrato-quadrati, o la quadruplicata, saranno pure in proporzione. C. B. D.

222. *Teor. Se vi siano più numeri da una parte, ed altrettanti dall' altra in proporzione, i primi delle due serie saranno proporzionali agli ultimi di esse: cioè siano due serie di numeri* $\begin{matrix}32 : 16 : 4\\24 : 12 : 3\end{matrix}$. *Dico essere* 32 : 4 :: 24: 3, *il che dicesi per equalità ordinata.*

Imperocchè $\frac{32}{4}=\frac{32\times16}{16\times4}$ (n.° 49 6.°) $\frac{24}{3}=\frac{24\times12}{12\times3}$:

Ed essendo il fratto $\frac{32\times16}{16\times4}$ uguale a $\frac{24\times12}{12\times3}$, come com-

posti da frazioni uguali sarà, pure $\frac{32}{4}=\frac{24}{3}$, o sia 32: 4 :: 14 : 3, che è per equalità ordinata.

Lo stesso vale per la proporzione perturbata. C. B. D.

CAPITOLO X.

APPLICAZIONE DELLA TEORIA DELLE PROPORZIONI GEOMETRICHE ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI NUMERICI.

223. Dalle precedenti teorie delle ragioni, e proporzioni deduconsi varie *Regole* atte non meno al geometra nelle sue speculazioni, ed alle scienze cui quelle si applicano, ma all'uso della vita civile benanche. La prima di queste è la Regola del tre, altrimenti detta la *Regola aurea*.

224. *Def.* La *Regola del tre* è un'operazione, con cui, dati tre termini, si rinviene il quarto proporzionale coi tre. Ella è *diretta*, o *inversa*, e ciascuna di esse può essere o *semplice*, o *composta*.

225. *Def.* La *diretta* è quella che sorge da una proporzione, i cui termini siano così disposti, che non solamente siano omogenei i termini di ogni ragione, ma inoltre ogni grandezza, e la sua corrispondente siano tutte due antecedenti, o tutte due conseguenti nella proporzione.

Regola del tre diretta semplice.

ESEMPIO.

Vogliasi valutare il prezzo di 54 canne di drappo, sapendosi il costo di 18 canne ascendere a 284.

La risoluzione dell' enunciato conduce a ritrovare un quarto proporzionale, ovvero ad una regola di tre diretta.

Imperciocchè supponendo che la lunghezza del secondo drappo fosse uguale alla lunghezza del primo, il prezzo di quello sarebbe uguale al prezzo di questo; se la lunghezza di quello fosse doppia della lunghezza di questo, il prezzo del primo sarebbe doppio del prezzo del secondo, se triplo, triplo, se moltiplice, egualmente moltiplice sarebbe l' altra, e così pure se la lunghezza fosse metà, metà sarebbe il prezzo, se terza parte, terza parte, ec. Vale a dire le lunghezze sono tra loro come i prezzi, o sia vi ha la proporzione tra le lunghezze, ed i prezzi: come 18 can. : 54 can. :: 284 docati : x docati. Questa è diretta 1.° perche si paragonano grandezze omogenee, come canne con canne, prezzi con prezzi. 2.° perchè le canne prime, e 'l valore 284 sono tutti due antecedenti, e le canne 54 col prezzo da ritrovarsi sono tutti due conseguenti. Così stabilita la proporzione, si ritroverà l' ignoto prezzo a tenore del (n.° 213), moltiplicando il secon-

do pel terzo termine, e dividendo il prodotto pel primo cioè $\frac{284 \times 54}{18} = 852$ doc. La proporzione perciò sarà 18 : 54 :: 284 : 852.

226. *Scol.* Si noti, che tante volte giova dividere il secondo termine pel primo, e poi per lo quoziente moltiplicare il terzo termine, il cui prodotto esprimerà il quarto termine, così nell' esempio addotto dividendo 54 per 18, si ha 3, di poi si moltiplichi 3 per 284 si avrà lo stesso numero 852. Ciò però si potrà eseguire nel caso che sia divisibile il secondo termine, e se nol sia questo, si potrà indagare se sia divisibile pel primo il terzo, che varrà lo stesso.

ESEMPIO II.

Valutare l' interesse di un capitale di 288 docati *al 5 per* 100.

Qui i capitali sono 100, e 288, l' interesse del primo è 5, si cerca quello del secondo. Adunque la proporzione è diretta, come nel precedente esempio, perciocchè il capitale 100 comprendesi nel 288, come l' interesse 5 nell' interesse ignoto. Onde sarà così disposta la proporzione 100 : 288 :: 5 : x, e quindi $x = \frac{5 \times 288}{100} = \frac{1440}{100} = 14, 4$, cioè 14 docati, e 4 carlini, e la proporzione sarà 100 : 288 :: 5 : 14, 4.

ESEMPIO III.

Un lavoro di $\overset{can}{28}$, $\overset{pal}{5}$, $\overset{once}{4}$ *sono costati* $\overset{duc}{48}$, $\overset{carl.}{3}$; *un' altro lavoro di* $\overset{can.}{54}$, $\overset{pal}{2}$, $\overset{once}{5}$ *quanto costeranno?*

In questo esempio le canne coi palmi ed once sono in proporzione de' prezzi, adunque le prime canne staranno alle seconde, come il prezzo delle prime al prezzo richiesto delle seconde, cioè $\overset{c.}{28}, \overset{p.}{5}, \overset{o}{4} : \overset{c.}{54}, \overset{p.}{2}, \overset{o.}{5} :: \overset{d.}{48}, \overset{c.}{3} : \overset{d.}{x}$, e riducendo le canne alla minima specie, che sono le once, sarà $\frac{2752}{96}$: $\frac{5213}{96} :: \frac{483}{10} : x$; ed essendo nella prima ragione uguali i denominatori, saranno que' fratti, come i numeratori (n.° 212), onde si avrà $2752 : 5213 :: 48, 3 : x = \overset{d}{91}, \overset{c}{4}, \overset{g.}{9}, \overset{calli}{5} + \frac{1144}{2752}$ di calli

Regola del tre composta diretta

227. *Scol.* Se nell' enunciazione del problema, che dà luogo ad una regola del tre diretta, invece di essere tre i termini noti, fossero 5, o più, la regola si dirà del *tre composta*, la quale si riduce a regola del *tre diretta* semplice.

ESEMPIO I.

Se 45 operai, travagliando per 7 giorni otto ore del giorno, hanno lavorato 96 canne, quante canne faranno 18 operai, travagliando per 15 giorni 4 ore al giorno?

L'enunciato del problema a prima vista pare che contenesse 7 quantità, ma esse tutte si riducono a tre, considerando che 45 operai travagliando in un ora producono un lavoro, in due ore, doppio lavoro, in 8, ottuplo lavoro: adunque tanto è che travaglino 45 operai per otto ore successive, quanto otto volte il numero degli operai in una sola ora, o sia $45 \times 8 = 360$ operai, e come questo lavoro si continua per 7 giorni, sarà lo stesso che se faticassero in un sol giorno 7 volte 360, ovvero 2520 operai in una sola ora.

Similmente i 18 operai secondi, lavorando 4 ore al giorno per 15 giorni, equivariano a $18 \times 4 \times 15$ applicati per una sola volta, cioè, fatta la moltiplicazione, a 1080 operai. Adunque la quistione si riduce a questa.

Se 2520 uomini lavorano 96 canne, 1080 uomini quante ne lavoreranno?

Posta in proporzione si avrà 2520: 1080:: 96: can: $x = \frac{96 \times 1080}{2520} = \frac{96 \times 108}{252}$, cassando un zero sopra e sotto, il che non altera il valore (n.° 49.7.°). E

fatta la moltiplicazione di 96 per 108, e poi la divisione per 252, si avrà il numero $41+\frac{36}{252}$, e ridotto il fratto a minimi termini verrà la ignota $x=41+\frac{1}{7}$ di canna.

228. *Scol.* Si sarebbe giunto allo stesso risultato, considerando che il travaglio primo stia al travaglio secondo in ragion composta del numero degli operai primi, e del tempo consumato da essi al numero degli operai secondi, e del tempo consumato da questi, e la proporzione sarebbe così scritta $96 : x :: (8 : 4)(7 : 15)(\underset{\text{can.}}{45} : \underset{\text{can.}}{18})$; ed eseguita la moltiplicazione, sarà $96 : x :: 8\times7\times\underset{\text{can.}}{45} : 4\times15\times18$, o sia $8\times7\times45 : 4\times15\times18 :: \underset{\text{can.}}{96} : \underset{\text{can.}}{x}$, ed $x=\frac{4\times15\times18\times96}{8\times7\times45}=\frac{3\times96}{7}=\frac{288}{7}=41+\frac{1}{7}$ canne, che è lo stesso risultato del precedente.

ESEMPIO II.

Se 25 *operai in* 22 *giorni scavano* 28 *canne cubiche di terra, quante ne scaveranno* 34 *operai in* 42 *giorni, supposto che i primi travaglino* 8 *ore al giorno, i secondi* 10; *e la forza dei primi stia alla forza de' secondi come* 6 *a* 7, *e la durezza del primo terreno stia alla durezza del secondo come* 11 *a* 14?

Qui i dati sono 11, ma si riducono a tre. Imperocchè, secondo quello che si è praticato nell' esempio precedente, i primi operai travagliando 22 giorni per 8 ore al giorno, faranno il medesimo lavoro che $25\times22\times8$ in un' ora; ma questi operai hanno una forza espressa dal 6. Dunque il prodotto indicato verrà moltiplicato per 6; onde sarà $25\times22\times8\times6=26400$, il numero degli operai primi travagliant in un' ora sarà espresso dal prodotto $34\times42\times10\times7=99960$

Il primo terreno, se avesse la durezza come uno, sarebbe espressa da 1 moltiplicato per lo numero delle sue canne, cioè da $\overset{\text{can.}}{28}$; ma come ha 11 gradi di durezza, sarà espresso da $28\times11=\overset{\text{canne}}{308}$.

Il numero ignoto x, che esprimer deve il numero delle canne che si ricercano, se il secondo terreno avesse la durezza come 1, sarebbe espresso da x, ma come quella durezza è 14 perciò sarà espressa da 14x.

Laonde, dietro queste riduzioni, s'istituirà la seguente proporzione: operai primi ad operai secondi, come travaglio primo a travaglio secondo, cioè sostituendo i rispettivi prodotti pocanzi rinvenuti, sarà $26400 : 99960 :: 308 : 14x$, e $14x$ sarà uguale a $\frac{99960\times308}{26400}$ di canne cubiche, ed una sola x eguaglia $\frac{2978768}{2640}$ diviso per 14, o sia $\frac{2978768}{2640}:\frac{14}{1}$, e facendo la divisione, sarà $x=\frac{2978768}{2640\times14}=\frac{2978768}{36960}$

80, 5945 di canne cubiche valore differente dal vero per meno di una diecimilesima.

ESEMPIO III.

Chiedesi quanto rende un capitale di 3848 in 28 mesi al 5 per 100 l' anno?

Egli è chiaro che l' interesse che si cerca, è nella ragion composta dell' interesse 5, del numero delle centinaja, e del tempo che rimangono impiegate; onde si avrà la proporzione, chiamando x l' interesse ignoto, 5 : x :: 1200 : 156198; ed x $\frac{15616 8\times5}{1200}$. Da qui sorge la seguente.

Regola di Sconto.

ESEMPIO

229 *Una persona da ad interesse una somma di 5848, nella qual e si comprende l' interesse al 5 per 100 per anno. Dopo otto mesi il debitore è chiesto a restituire la somma al creditore. Determinare la somma da restituirsi, deducendone l' interesse per i quattro mesi che avrebbe dovuta quella somma rimanere in mano del debitore?*

Perchè un capitale di docati 100 rende in un anno 5, è chiaro che 105 comprende in se il capitale 100, e l' interesse 5. E siccome la ragione del capitale 5848 al suo interesse non è quella di un semplice capitale ad un' altro, ma è composta da

quella de' capitali, e del tempo. Sarà perciò, supposto x l'interesse di quattro mesi, $5848 : x :: (105 : 5)(12 : 4) :: 105 \times 12 : 5 \times 4$, o sia $105 \times 12 : 5 \times 4 :: 5848 : x$, ed $x = \frac{5 \times 4 \times 5848}{105 \times 12} = 92{,}8$, d. c. g calli $2\ 6 + \frac{10}{12}$ di callo, quale somma tolta da 5848, il residuo dinoterà il danaro da restituirsi.

Regola del tre Inversa semplice.

230 *Def.* **Una** regola di tre si dirà *inversa*, e semplice se l'enunciazione del problema, da cui risulta, contenga tre termini, che col quarto da rinvenirsi formi una proporzione, i cui termini sono reciproci fra loro, vale a dire una grandezza, e la sua analoga non sono tutte due antecedenti, o conseguenti, ma se l'una è antecedente di una ragione, l'analoga al contrario sarà conseguente, o sia le grandezze analoghe o formano i termini medj, o gli estremi.

ESEMPIO

Per fare un' opera qualunque 84 operai vi hanno impiegato giorni 36: perchè la stessa sia compiuta in giorni 12, quanti operai vi occorreranno.

Suppongasi che gli operai travaglino lo stesso numero di ore al giorno, ed abbiano forze uguali. E poichè quell'opera che da 84 persone si è fatta in 36 giorni si vuole compiere in 12 giorni, chia-

ro si scorge che nella seconda operazione vi bisoguerà un maggiore numero di operai, essendo il tempo secondo minore del primo, il quale essendo il terzo del tempo di prima; bisogna che il numero degli operai sia triplo, cioè che gli operai siano in ragion inversa de' giorni. La proporzione dunque sarà $12 : 36 :: 84 : x$, nella quale si scorge che il tempo dinotato dal 36, e gli operai 84 che vi corrispondono, formano i medj termini, e 'l tempo 12, e gli operai ignoti x formano gli estremi. Moltiplicando il secondo pel terzo, e diviso pel primo, si avrà $x = \frac{36 \times 84}{12} = 3 \times 84 = 252$, vale a dire il numero degli operai occorrenti è 252.

231 Questa regola potrà degenerare in **regola del tre inversa composta**, se invece di tre termini, ve ne siano più.

Regola del tre Inversa composta.

ESEMPIO

Se 36 *operai in* 18 *giorni a* 6 *ore il giorno fanno un certo lavoro, perchè questo stesso lavoro sia fatto in* 6 *giorni, travagliandosi soltanto* 4 *ore al giorno, quanti uomini, supposti della stessa forza, vi bisogneranno?*

Essendo il tempo secondo minore del tempo primo, è chiaro che gli uomini secondi debbano essere di numero maggiore de' primi, onde si darà luogo alla seguente proporzione, cioè $4 \times 6 : 18 \times 6 ::$

$36 : x = \frac{36\times6\times18}{4\times6} = 9\times18 = 162$ uomini.

232. *Lem. Dividere il numero 48 in tre parti proporzionali ai numeri 12, 4,3, cioè che la prima stia alla seconda parte, come 12: 4, e la prima stia alla terza come* 12: 3

Le parti del 48 si chiamino A,B,C, sarà A : B:: 12: 4, e permutando A: 12:: B: 4. Similmente A : C: : 12: 3, permutando sarà A : 12 :: C: 3. Laonde le tre ragioni di A: 12, B: 4, C: 3, sono uguali fra loro. Ma come uno degli antecedenti sta ad uno de' conseguenti, così la somma degli antecedenti alla somma da'conseguenti, sarà dunque A+B+C: 12+4+3:: A: 12; ed A+B+C costituiscono il numero 48, sarà perciò, invertendo le ragioni, 19: 48 :: 12: A, 19: 48:: 4 : B, ed in fine 19: 48:: 3 : C, il che si riduce a rinvenire tre quarti proporzionali A,B,C: si trovino (n.° 213), e sarà $A = \frac{48\times12}{19} = \frac{576}{19} = 30 + \frac{6}{19}$, $B = \frac{192}{19} = 10 + \frac{2}{19}$, $C = \frac{144}{19} = 7 + \frac{11}{19}$. Adunque riducendo ad una somma le tre A,B,C, si avrà il numero 48. Il che mostra la giustezza della soluzione.

Regola di Società.

233 Il precedente Lemma conduce alla soluzione della regola di Società, la quale non si propone altro, che dividere un numero in 2, o più parti proporzionali a numeri dati. Ha il suo luogo massi-

mamente nel commercio, ove il guadagno, o la perdita fatta sopra comuni capitali vuol dividersi in proporzione de' capitali posti in comune. A comprenderla, sia proposto il seguente esempio.

ESEMPIO I.

Tre negozianti hanno formata una Società, ed hanno posto in comune. Il primo 5805, *il secondo* 3848, *il terzo* 7948. *Hanno posto a traffico la somma, e dopo un certo tempo vi hanno guadagnato* 2486. *Si domanda il guadagno di ciascuno?*

Siano A,B,C,i negozianti, e si dispongono così.

A. 5805
B. 3848
C. 7948
Guadagno 2486 17601

Fatta la somma de'capitali che è 17601, e la parte del guadagno di A sia A stessa, di B sia B, di C sia C, sarà la somma di tre guadagni uguale a 2486. Il problema si riduce a dividere il numero 2486 in tre parti proporzionali a' numeri 5805,3848 7948. Laonde in virtù del Lemma precedente nasceranno le tre proporzioni 17601: 2486:: 5805 : $A=\frac{2486\times5805}{17601}$, 17601: 2486:: 3848 : $B=\frac{2486\times3848}{17601}$, 17601: 2486:: 7948: $C=\frac{2486\times7948}{17601}$.

E ritrovati i quarti proporzionali, sarà la porzione

spettante ad $A = 820 + \frac{410}{17601}$, a $B = 543 + \frac{7785}{17601}$, $C = 1122 + \frac{9406}{17601}$ le quali unite insieme danno la somma di 2486. Il che giustifica l' operato.

ESEMPIO II.

Tre persone hanno posto in società, il primo 1000, restando in società per 6 mesi, il secondo 3454 per 8 mesi, il terzo 5482 per 12 mesi. Il guadagno ritratto è 2000. Cercasi la porzione che spetta a ciascuno, relativa al capitale ed al tempo.

Primieramente è chiaro che il primo capitale impiegato per 6 mesi è lo stesso che 1000×6, e s' impiegasse per un mese. Così il secondo è 3454×8, il terzo è 5482×12. I capitali dunque sono 1.° 6000

Il	2.° 27632
Il	3.° 65784
Guadagno 2000	100416

Così la questione si riduce alla precedente, del lemma (n.° 232), cioè di dividere il guadagno 2000 in proporzione de' numeri 6000, 27632, 65784, ed eseguendo l' operazione di sopra, si avrà pel primo la seguente proporzione 100416:2000:: 6000: 1.° $= \frac{12000000}{100416}$, pel secondo 100416: 2000:: 27632 : 2.° $= \frac{55264000}{98416}$, pel 3.° 100416: 2000:: 65784:3.° $= \frac{131568000}{100416}$.

Ciocchè si è detto pel lucro vale per la perdita, come lo mostra il seguente esempio.

ESEMPIO.

Un estensione di 246 moggia di territorio si trova diviso in tre parti tali che la prima è di 96 moggia, la seconda di 85, la terza di 65. Ora un alluvione avendone distrutte 48, bisogna dividere il rimanente territorio nella stessa proporzione dei numeri 96, 85, 65,

Si tolgano dalle 246 moggia 48 moggia, e si avranno 198 moggia di residuo. Siano le parti A,B,C, Sarà A come 96
B come 85
C come 65

somma 246

onde si avranno le seguenti proporzioni

$$246 : 198 :: 96 : A = \frac{198 \times 98}{246} = 77 + \frac{66}{246}$$

$$246 : 198 :: 85 : B : = \frac{198 \times 85}{246} = 68 + \frac{102}{246}$$

$$246 : 198 :: 65 : C = \frac{198 \times 65}{246} = 52 + \frac{78}{246}$$

Della Regola di Alleazione.

234. Allorchè si mischiano insieme cose di diverso prezzo, come i liquori varj, i metalli, le merci, e se ne dimanda il valore del prezzo, che

corrisponde alle diverse parti della miscela: o pure, qualora propongasi un medio prezzo, si ricerca quanto di ciascuna merce, o liquore debbasi mescolare, perchè possa detta miscela esser venduta a quel prezzo arbitrario, onde in ciascun di questi casi si adopra la regola di allegazione. Gli esempj seguenti la faranno intendere abbastanza.

ESEMPIO I.

Debbasi fare una statua di argento di 1500 libre, cotesta massa poi si voglia fare di un misto dello stesso metallo, ma di valore diverso. Cioè di due specie, l'una di docati 13 la libra, e sieno 984 libre di esso, l'altra di docati 8 la libra, e siano libre 516. Si chiede il prezzo di ciascuna libra della miscela.

S' istituisca la proporzione seguente. Se una libra costa docati 13, quanto costeranno 984? o sia $1: 13 = 984 : x = 984 \times 13 = 12792$

E così pure $1 : 516 = 8 : x = 516 \times 8 = 4128$

Si aggiungano insieme cotesti prodotti, e si avrà il valore totale delle due specie d' argento, cioè 76920. Di poi, per conoscere il valore d' una libra della miscela, facciasi la proporzione seguente

$$\underset{\text{lib.}}{1500} : \underset{\text{lib.}}{1} = \underset{\text{doc.}}{16920} : \underset{\text{doc.}}{x} = \frac{16910 \times 1}{1500} = \underset{\text{duc.}}{11} \quad \underset{\text{car.}}{2}, \quad \underset{\text{gr.}}{8}$$

ESEMPIO II.

Se si mischiano insieme 752 botti di vino di tre sorte, cioè 252 di docati 48 la botte, 168

di docati 85, 332 *di docati* 96 *la botte, mescolati cotesti vini, si cerca il prezzo medio di ciascuna botte. Inoltre si voglia il lucro di* 1980 *doc.*

Si moltiplichino i numeri rispettivi delle botti per i proprj prezzi, si sommino le botti, ed i prezzi, ai quali si aggiunga il lucro 1980. Di poi si divida la somma totale pel numero delle botti, si avrà il prezzo medio richiesto.

Botti. . .	252 a duc. 48 la botte.	.	12096
Botti. . .	168 a duc. 85 la botte.	.	14280
Botti. . .	332 a duc. 96 la botte.	.	31872
	752 Lucro		1980

Adunque si avrà la proporzione. Somma 60228

$$752 : 1 = 60228 : x = \frac{60228}{752} = \overset{\text{duc.}}{80} + \frac{68}{752}.$$

235 *Scol.* Evvi però una seconda questione, per avventura più difficile, che da luogo ad una regola di allegazione, ed è quando conoscendosi il valore di ciascuna cosa, e 'l medio, si ricerca quanto di ciascuna specie debba prendersi, acciò possa vendersi il composto a quel prezzo proposto. Ovvero, ciò che ritorna allo stesso.

236 Date due cose di differenti valori, determinare quello che bisogna prendere da ciascuna per formare una quantità media di un dato valore.

ESEMPIO I.

Se diansi due materie differenti, per esempio oro, ed argento, che abbiano eguali volumi per

esempio un piede cubico ciascuno, e l'oro pesi 19 lib., l'argento 10. lib: determinare quali parti di ciascuna di queste materie debbasi prendere per comporre un misto, che abbia il volume eguale ad un piede, e pesi 15. lib.

Si prenda la differenza tra il peso massimo, e'l medio, la quale è 19—15= 4, di poi quella del medio sul minimo, cioè 15—10 = 5, e finalmente la differenza dei metalli da confondersi, cioè 19—10= 9. Di poi fatte le frazioni $\frac{4}{9}$, e $\frac{5}{9}$, che abbiano per denominatore la differenza dei metalli dati, e per numeratore le differenze del massimo sul medio, e del medio sul minimo: del più pesante metallo se ne dovrà prendere $\frac{5}{9}$ del suo volume, del meno pesante $\frac{4}{9}$.

Imperocchè essendo il metallo di medio peso maggiore dell' argento, che ha il minimo peso, e nel tempo stesso minore del peso dell' oro, che ottiene il massimo; nella miscela vi dovrà perciò essere più quantità di oro, che di argento, ed essendo la differenza del massimo sul medio espressa da 4, e quella del medio sul minimo espressa da 5, la quantità dell'oro, sarà a quella dell' argento come 5: 4, Per la qual cosa dividendo il novello volume, che si chiami 1, e che uguaglia ciascuno dei due dati, ovvero la somma delle differenze del peso de'metalli dati dal peso del medio, nella ragione di

19—15, e di 15—10, o sia di 5 a 4, si avrà la porzione del volume di oro, e la porzione di quello dell' argento, che compongono il misto. Il che si esegue (n.° 253.)

Prima differenza 19—15= 4
Seconda differenza 15—10= 5

Somma 9

$$9 : 1 = 4 :: x = \frac{4}{9} \text{ di argento.}$$

$$9 : 1 :: 5 : x = \frac{5}{9} \text{ d' oro.}$$

Laonde per avere il composto ci vorranno $\frac{5}{9}$ del volume di oro, $\frac{4}{9}$ del volume di argento.

ESEMPIO II.

Vogliasi un misto di tre specie di sostanze, per es. una botte, un tomolo, una libra, ec. la prima delle quali valga 18, *l' altra valga* 14, *e dell'altra il valore sia* 11. *Il valore d'una libra del composto sia stabilito per* 15. *Si chiede quanta parte della prima, quanta della seconda e quanta della terza si debba prendere per fare una botte, tomolo, o una libra della richiesta miscela?*

Sieno le sostanze A, B, C,

	Differenze	M. . 15
A= 18	1 + 4	
B= 14	3	
C= 11	3	

Somma 11.

$$11 : 1 :: 5 : x = \frac{5}{11},\ \frac{5}{11} \times 18 = \frac{90}{11}$$

$$11 : 1 = 3 : x = \frac{3}{11},\ \frac{3}{11} \times 14 = \frac{42}{11}$$

$$11 : 1 = 3 : x = \frac{3}{11},\ \frac{3}{11} \times 11 = \frac{33}{11}$$

Somma . . . . . . $\frac{165}{11} = 15 = M.$

Si alleghino insieme le due A, e B paragonandole con M, e si notino inversamente le differenze, che A, e B hanno da M; ed essendo la differenza di A da M, o sia di 18 da 15, 3, e 14 da 15, 1, si noti 1 a destra di A, e 3 a destra di B.

Si alleghino anche così A, e C, paragonandole con M, e si notino le differenze negl' inversi posti, cioè A-M=18-15=3. Si ponga accanto a C, e 15—11=4 accanto ad A 1. Così vicino ad A sarà 5, a B 3, a C anche 3.

Si prenda la somma delle differenze, che è 11. Di poi si facciano le 3 seguenti proporzioni.

$11 : 1 = : 5 : x = \frac{5}{11}$ di A

$11 : 1 :: 3 : x = \frac{3}{11}$ di B

$11 : 1 = 3 : x = \frac{3}{11}$ di C

Adunque di A si debbono prendere $\frac{5}{11}$, di B $\frac{3}{11}$, di C $\frac{3}{11}$. Prese formeranno il medio M=15.

Infatti $\frac{5}{11} \times 18 = \frac{90}{11}$, $\frac{3}{11} \times 14 = \frac{42}{11}$, $\frac{3}{11} \times 11 = \frac{33}{11}$. Presa la somma, si avranno $\frac{165}{11} = 15$. Il che mostra la giustezza dell' operato.

Regola di falsa posizione.

237. Regola di falsa posizione è quella che si propone a rinvenire un numero vero dal supporre uno falso. Ella si riduce a dividere un numero in parti proporzionali a de' numeri, che si ricavano dalla questione che si propone. È di due specie, cioè di *semplice*, e di *doppia posizione*, semplice è quando si perviene al numero vero col supporre un solo falso, doppia è quando non si perviene con una sola supposizione, ma con due. Cominciamo dal caso di una sola posizione.

ESEMPIO I.

Dividere il numero 846 fra tre persone, in modo che la seconda abbia il triplo della prima, e la terza il doppio della prima e seconda?

Suppongasi che la parte toccante alla prima sia 1; sarà quella della seconda 3, quella della terza sarà espressa dal numero 8, e mettendole in ordine, e chiamandole A, B, C, sarà,

A. 1
B. 3
C. 8

Somma 12

Il problema si riduce a dividere 846 in proporzione de'numeri 1, 3, 8, il che si esegue (n.° 232). Si faccia dunque.

$$12 : 846 :: 1 : x = \frac{846}{12} = 70 + \frac{6}{12}$$

$$12 : 846 :: 3 : x = \frac{846 \times 3}{12} = 211 + \frac{2}{12}$$

$$12 : 846 :: 8 : x = \frac{8 \times 846}{12} = 564$$

Laonde A avrà. . . . . $70 + \frac{6}{12}$

B. . . . . $211 + \frac{6}{12}$

C. 564

Somma 846

Il che mostra la giustezza dell'operato.

ESEMPIO II.

Dividere il numero 488 in tre parti tali che la prima stia alla seconda come 4 : 7 ; e la seconda alla terza come 3: 5 ?

Suppongasi la prima A uguale ad 1, la 2.ª B, e sia $4 : 7 :: 1 : B = \frac{7}{4}$. E perchè la seconda sta alla terza come $3 : 5$, sarà $3 : 5 :: \frac{7}{4} : C = \frac{35}{12}$.

Adunque prendendo la somma delle tre prima riducendole allo stesso denominatore (n.° 53)

$$A = 1$$
$$B = \frac{7}{4}$$
$$C = \frac{35}{12}$$
$$\text{Somma} \ldots \frac{68}{12}$$

la quale non essendo uguale a 488, mostra che la supposizione della prima uguale ad 1 sia falsa: si troverà la vera, facendo come prima $\frac{68}{12} : 488 ::$ $1 : x = \frac{488}{1} : \frac{68}{12} = \frac{12 \times 488}{68} = 86 + \frac{8}{68} = A$, $\frac{68}{12} : 488 ::$ $\frac{7}{4} : x = \frac{488 \times 7 \times 12}{4 \times 68} = 150 + \frac{48}{68} = B$, $\frac{68}{12} = : 488 ::$ $\frac{35}{12} : x = \frac{488 \times 35 \times 12}{68 \times 12} = 251 + \frac{12}{68} = C$. Unendo in-

sieme i quarti proporzionali, si avrà la somma di 488. Il che mostra ec.

ESEMPIO III.

Trovare un numero, la cui terza, ottava, e nona parte facciano 54?

Suppongasi la prima parte A=1, sarà la sua terza $\frac{1}{3}$, la sua ottava $\frac{1}{8}$, la nona $\frac{1}{9}$. Si riducano le tre frazioni $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ allo stesso denominatore, e si avranno $\frac{72}{216}+\frac{27}{216}+\frac{24}{216}$ e si sommino, onde si abbia il fratto $\frac{123}{216}$. Non essendo tale fratto uguale al numero 54, sarà falsa la supposizione di 1: si avrà la vera se facciasi come prima, cioè

Se la frazione $\frac{123}{216}$ in se contiene la terza, l'ottava, e la nona parte di 1; qual sarà il numero, la cui terza, ottava. e nona parte unite insieme produrranno 54?

Per la qual cosa si avrà la seguente proporzione $\frac{123}{216}$: 1:: 54: $x=\frac{54\times216}{123}=94+\frac{102}{123}$. Adunque $94+\frac{102}{123}$ sarà il numero cercato, del quale preso $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$, si avrà nella loro somma il 54. Si prendano è sieno A, B, C.

Sarà $A = \frac{11664}{3 \times 123} = 31 + \frac{123}{369}$, $B = \frac{11664}{8 \times 123} = 11$ $+ \frac{840}{984}$, $C = \frac{11664}{9 \times 123} 10 + \frac{594}{1107}$, che sommate si ottiene 54.

Il che mostra la giustezza dell' operato.

In altro modo. Supposti i fratti ridotti allo stesso denominatore che è 216, si prenda di questo la terza parte, che è 72, l' ottava che è 27, la nona che è 24. Di poi si prenda la somma di 72,27,24, che è 123, e si faccia la proporzione seguente: 123: 216 :: 54: x. Si avrà il numero stesso $94 + \frac{102}{123}$, di cui presa la terza, ottava e nona parte si avrà 54.

238. Gli esempj precedenti si sono risoluti con una sola falsa posizione. Vi sono di quei, che ne richieggono due, onde è detta di doppia posizione, qual si propone qui appresso.

Regola di doppia posizione, o sia a due false posizioni.

ESEMPIO

Un uomo morendo lascia a tre un' eredità di 14384 duc. e vuole che il secondo abbia il doppio del primo, con 12 duc. di più; e che il terzo ne abbia quanto insieme ne hanno i due primi con 15 di più. Si cerca la porzione di ciascuno?

Suppongasi che il primo abbia 1, e chiamando i tre A,B,C, Sarà dall' enunciato.

A 1
B . . . . . . 2+12
C . . . . . . 3+12+15

Somma. . . . 45

Non essendo 45 uguale a 14384, si conchiude esser falsa la supposizione fatta. Inoltre le parti supposte non sono proporzionali alle vere parti, perocchè vi sono aggiunte alla seconda la grandezza costante 12, ed alla terza 15, le quali impediranno che le parti in quistione siano proporzionali; lo stesso accaderebbe, se si facessero variare i numeri assunti, perchè i numeri aggiunti non faranno proporzione.

Adunque se si trascurino nella seconda, e terza parte i numeri costanti 12, 12, 15, cioè 39, sottraendolo dal numero dato 14384, si avrà così il residuo 14345, il quale diviso come sopra in proporzione de'tre 1, 2, 3, e dopo rinvenute le parti, si aggiungano alla seconda, e terza ciò che si è trascurato, si otterranno le vere porzioni. Si faccia dunque $6 : 14345 :: 1 : x = \frac{14345}{6} = 2390 + \frac{5}{6}$

$6 : 14345 :: 2 : x = \frac{14345 \times 2}{6} = 4880 + \frac{10}{6}$, $6 : 14345 ::$ $3 : x = \frac{14345 \times 3}{6} = 7170 + \frac{15}{6}$. Se a ciascuna di queste parti del numero 14345 ritrovate, si aggiunga alla seconda il numero 12, ed al terzo il 12, ed il 15, si avranno per $A = 2390 + \frac{5}{6}$

$$\text{per B} = 4780 + \frac{10}{6} + 12$$

$$\text{per C} = 7170 + \frac{15}{6} + 12 + 15$$

Somma. . . 14384

TRATTATO
DI ARITMETICA

PARTE II.

CAPITOLO I.

DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

1 *Def.* Si dice *progressione geometrica*, o *serie* una successione di numeri crescenti, o decrescenti, ma in continua proporzione geometrica Tale è la serie.

A $\div$ 160: 80: 40: 20. 10. 5, ec. decrescente, o l'altra.

B $\div$ 2: 6: 18: 54: 162: 486: ec. crescente.

2 *Corol.* I. Dalla definizione apparisce esserela quantità di ragione di un termine al seguente di un costante valore, cioè nella prima $\frac{160}{80} = \frac{80}{40} = \frac{4}{20} =$ $= \frac{20}{10} = \frac{10}{5}$, e nella seconda $\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{18}{54} = \frac{54}{162}$ $= \frac{162}{486} = \frac{1}{3}$, il che rilevasi riducendo i fratti a minimi termini.

3. *Cor.* II. È pur manifesto che i termini di una progressione fanno da antecedente, e da conseguenti, eccettuato il primo che fa da antecedente, e l'ultimo da conseguente. Così nella progressione A mentre 80 è conseguente di 160, è poi antecedente di 40, e questi similmente è conseguente di 80, ed antecedente di 20, e così di seguito.

4. *Scol.* Facendo in ogni ragione geometrica l' antecedente da dividendo, il conseguente da divisore, ed essendo il dividendo uguale al divisore moltiplicato per lo quoto, sarà vice versa il divisore uguale al dividendo diviso pel quoto, ne segue, che il conseguente sia uguale all' antecedente diviso per lo quoto, vale a dire, data la ragione di 12 : 4, 4 è uguale al 12 diviso per lo quoto 3, o sia $4 = \frac{12}{3} = 4$. Essendo la progressione geometrica una serie continuata di rapporti uguali, si verificherà che ogni termine di essa è uguale al precedente diviso per la ragione della progressione. Così nella progressione A il $20 = \frac{40}{2} = 20$, e così nell'altra B il $162 = \frac{54}{1} : \frac{1}{3} = 162$.

5 *Corol.* Siegue da ciò, che conoscendo il primo termine, e la ragione di un termine all' altro, si potrà scrivere la serie, dividendo il primo per la ragione, si avrà il secondo, dividendo questo per la ragione, si avrà il terzo, ec: Da ciò nasce una verità generale, che or dimostro.

6 *Teorema ogni termine di una progressione geometrica è uguale al primo termine di essa diviso per la ragione della progressione elevata alla potenza disegnata dal numero di termini, che la precedono.*

Siano le due serie geometriche.

H ∺ 972: 324: 108: 36: 12: 4 decrescente

K ∺ 2: 8: 32: 128: 512: 2048 crescente.

Dico essere nella prima H l' ultimo termine 4 uguale al primo 972 diviso per 3 elevato alla potenza quinta del numero de' termini, che lo precedono, cioè $4 = 972: 3\times3\times3\times3\times3$. E nella seconda K essere $2048 = 2$ diviso per $\frac{1}{4}$ elevato alla quinta potenza.

Dal numero precedente rilevasi essere ogni termine uguale al precedente diviso per la ragione della progressione, sarà perciò nella serie H $324 = \frac{972}{3}$, $108 = \frac{324}{3}$, $36 = \frac{108}{3}$, $12 = \frac{36}{3}$, $4 = \frac{12}{3}$. Se nel valore di $108 = \frac{324}{3}$ si ponga invece di 324, la sua uguale $\frac{972}{3}$, Si avrà $108 = \frac{972}{3} : \frac{3}{1} = \frac{972}{3\times3}$; e se nel valore di 36 invece di 108 si ponga l' uguale $\frac{972}{3\times3}$, si avrà $36 = \frac{972}{3\times3} : \frac{3}{1} = \frac{972}{3\times3\times3}$;

Similmente in 12 si ponga in vece di 36 il valore suo $\frac{972}{3\times3\times3}$, si avrà $12 = \frac{972}{3\times3\times3} : \frac{3}{1} = \frac{972}{3\times3\times3\times}$

E finalmente, riponendo questo valore nell' ultimo $\frac{12}{3}$, si avrà $4 = \frac{972}{3\times3\times3\times3} : \frac{3}{1} = \frac{972}{3\times3\times3\times3\times3}$

$= \frac{972}{243} = 4.$

Così pure avviene nella serie K, ove l' ultimo termine $2048 = 2$ diviso pel rapporto $\frac{1}{2}$ della serie elevato alla potenza del numero di termini precedenti che è. 5. Il tessuto della dimostrazione è lo stesso di quello della serie H, che per chiarezza vado ad eseguire.

1.° $8 = \frac{2}{1} : \frac{1}{4} = \frac{2\times4}{1} = 8$

2.° $32 = 8 : \frac{1}{4} = 4\times8$

3.° $128 = 32 : \frac{1}{4} = 32\times4$

4.° $512 = 128 : \frac{1}{4} = 4\times128$

5.° $2048 = 512 : \frac{1}{4} = 4\times512$

Adunque $2040 = \frac{512}{\frac{1}{4}} = \frac{128}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{32}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}} =$

$$\frac{8}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{2}{1}:$$

$$\frac{1}{4\times4\times4\times4+4}=2\times4\times4\times4\times4\times4=2048.$$

Il quale Teorema dà questa regola generale.

» In ogni serie geometrica di termini decre-
» scenti, o crescenti, ogni termine è uguale al pri-
» mo termine diviso per la quantità di ragione di
» essa serie innalzata ad una potenza dinotata dal
» numero de' termini precedenti ad esso, sino al pri-
» mo, o se fosse serie crescente, ogni termine è
» uguale pure al primo moltiplicato per lo deno-
» minatore della ragione innalzato alla stessa poten-
» za del numero de' termini precedenti, sino al primo.

Ed è vero anche » che un termine di una serie
» uguaglia un' altro diviso per l'esponente della
» ragione elevata alla potenza dinotata dal numero
» de' termini esistenti tra l'uno e l'altro, incluso
» quell' altro, cioè nella serie H $36=\frac{972}{3\times3\times3}$

7. *Corol.* I. Segue da ciò, che in una serie qualunque, se si conosce il primo termine, il numero, e la ragione de' termini, si conoscerà l'ultimo. Come nella serie H si è detto essere $4=\frac{972}{3\times3\times3\times3\times3}$; nella quale, se 4 fosse ignoto, vale a dire, se si chiamasse u, sarebbe $u=\frac{972}{3\times3\times3\times3\times3}$, e sarebbe noto, come è il fratto, in cui si conosce il nume-

ratore, e 'l denominatore, e così pure si verifica per la serie K » Vale a dire dato in una serie il » primo termine, il numero di essi, e la ragione, » si saprà pur l'ultimo termine, dividendo il primo » de' termini per la quantità di ragione moltiplicata » in se stessa tante volte, quanti sono i termini » precedenti.

8. *Corol.* II. E se sia noto il primo, l'ultimo termine, e 'l numero de' termini, si potrà conoscere la ragione della progressione. Imperocchè nella serie decrescente H essendo $4=\frac{972}{3\times3\times3\times3\times3}$, moltiplicando tanto il 4, che il fratto per lo denominatore $3\times3\times3\times3\times3$, si avrà $4\times3\times3\times3\times3\times3$ $=\frac{972\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$, che ridotto a minimi termini si ridurrà a 972, vale a dire il 3 moltiplicato cinque volte per se stesso, e questo prodotto moltiplicato per 4 è uguale a 972; e la potenza quinta del 3 è uguale a $972 : 4=243$. Laonde, estraendo la radice quinta da 243, si avrà il 3, che è la quantità di ragione, quindi, conosciuta la quantità di ragione, si potrà scrivere la progressione.

Esemp. Siano dati di una progressione il primo termine 3, e l'ultimo 1875, il numero de' termini che la debbono comporre sia 5, incluso l'ultimo; e chiamando q il denominatore del quoto ignoto, sarà la quarta potenza di $q=\frac{1875}{3}=625$, onde estraendo la radice quadrata da 625, si avrà 25, e prendendo la radice quadrata da 25, si avrà

5, che sarà il denominatore richiesto, numero di volte che l'antecedente cape nel conseguente, e con ciò la serie sarà 3: 15: 75 : 375 : 1875. . . L

Lo stesso si pratica per una serie decrescente.

9. *Corol:* III. Si rileva anche il modo d'inserire tra due numeri un numero di medj geometrici, che si voglia. Perciocchè si riduce a trovare la ragione della serie. Per esempio siano i numeri 972, e 4, tra quali si vuole inserire quattro medj geometrici, vale a dire si vuole fare una serie di sei termini. A tal uopo si ricerchi il quoto q, che sarà, pel n.° precedente, espresso così: q=radice quinta di $\frac{982}{4}$= radice quinta di 243, la quale sarà 3. Per la qual cosa la serie sarà 972: 324: 108: 36: 12: 4, ed i medj geometrici saranno i numeri frapposti a 972, e 4.

10 *Teor. Se tra tutti i termini di una progressione geometrica si frappone un medesimo numero di medj proporzionali geometrici: la nuova serie sarà pure una progressione geometrica.*

Si esponga la serie geometrica.

E ∺ 8192: 1024: 128: 16: 2, la cui ragione sia 8, e tra il primo, e secondo si prendano due medj geometrici, e così si pratichi tra il secondo e terzo, tra il terzo, e 'l quarto, e così appresso, presi tali medj geometrici, nascerà la serie

G ∺ 8192: 4096: 2048: 1024: 512: 256: 128: 64: 32: 16: 8: 4: 2: questa sarà una progressione geometrica continua.

Si scrivano le progressioni parziali.

*

∺ 8192: 4096: 2048: 1024 . . . . (1)
∺ 1024: 512: 256: 128 . . . . (2)
∺ 128: 64: 32: 16 . . . . (3)
∺ 16: 8: 4: 2 . . . . (4)

Sarà in (1) la ragione di 8192 : 1024 (n.° 205) in triplicata di 8192 a 4096, o di questo a 2048o di questo a 1024. In (2) 1024 : 128 in triplicata ragione di 1024 : 512, o di 512 : 256, o di 256 : 128. In (3) 128 : 16 in triplicata di 128 : 64, o di 64 : 32, o di 32 : 16. In (4) 16 : 2 in triplicata di 16: 8, o di 8: 4, o di 4: 2. Ma le ragioni di 8192 : 1024 di 1024 : 128, di 128 : 16, di 16 : 2 sono uguali fra loro per ipotesi della serie E, saranno pure uguali tra loro le triplicate di 81192 : 4096, di 1024 : 512, di 182: 64, di 16: 8. E' quindi saranno pure uguali le semplici ragioni loro, e così pure le altre intermedie. Laonde tutti i termini uniti, faranno una progressione, quale è dinotata da G. C. B. D.

11. *Cor.* II. Da ciò segue, che se in una progressione geometrica si prendano quattro termini in modo, che tra il primo, e 'l secondo si pongano tanti termini, quanti tra il terzo, e 'l quarto, tali quattro termini saranno proporzionali: Per esempio nella progressione G si prendano i quattro termini 2048, 256, 64, 8, in modo che tra 2048, e 256 si frappongano due termini, e trà 64, e 8 due altri, saranno quei quattro proporzionali, cioè 2048 ; 1024 ; 512, 256. Perciocchè essendo continuamente proporzionali, sarà il primo 2048 all' ultimo 256 in triplicata ragione di 2048: 1024, o di 1024 : 512, o di 512: 256. Così pure 64: 8 in triplicata

ragione di 64: 32, o di 32: 16, o di 16 : 8 ; e le ragioni triplicate sono uguali, saranno anche uguali le altre che intercedono tra i quattro termini assunti, cioè sarà 2048: 256:: 64: 8.

12 *Teor. La somma di tutti i termini della serie geometrica è uguale al primo termine moltiplicato per la differenza del primo dall' ultimo, diviso per la differenza del primo dal secondo, aggiunto poi al quoto l' ultimo termine.*

Sia la serie Geometrica ∺ 729: 243: 81: 27: 9: 3; dico esser vero l'assunto. Perchè i numeri della progressione sono continuamente proporzionali, si avranno le seguenti ragioni uguali 729 : 243 :: 243: 81:: 81: 27:: 27: 9:: 9 : 3; sarà perciò (n.° 220) 729+243+81+27+9: 243+81+27+9+3:: 729: 243. Laonde convertendo, (n.° 217) sarà 729+243+81+27+9 : 729+243+81+27+9 —243 —81—27—9—3::729: 729—243: o sia, facendo la sottrazione indicata, sarà 729+243+81+27+9: 729 —3:: 729: 729—243, e quindi 1089 (n.° 213. p. 1.a)

$$=\frac{729\times 729-3}{729-243}=\frac{729\times 726}{486}=1089.$$

Somma de' termini meno l' ultimo, a cui aggiunto l' ultimo 3, si avrà la somma totale 1092.

13 *Corol.* Se si supponga la serie decrescente all' infinito, l' ultimo termine, che nella presente è 3, nell' infinita sarà infinitesimo, e quasi zero, e quindi la somma sarà uguale al quadrato del primo termine diviso per la differenza del primo, e del secondo termine.

Scol. Ed essendo $1092=3\frac{(3^6-1)}{3-1}$ ... 1.a ovvero

$\frac{3\times729-3}{3-1}$...2.ª (3^6 è lo stesso che 3×3×3×3×3×3).
Sarà pur vero, che la stessa somma può esprimersi col primo, coll' ultimo termine e colla ragione della serie.

CAPITOLO II.

DELLE PROPORZIONI, E PROGRESSIONI ARITMETICHE.

14 *Teorema. In ogni proporzione aritmetica la somma de' termini estremi è uguale alla somma de' medj.*

Sia per esempio: 3. 5: 7. 9: sarà 3+9 = 5 +7. Sia pure 8. 5 : 4. 1, sarà 8+1=4+5.

Nella proporzione aritmetica gli antecedenti differiscono da' loro conseguenti egualmente (n.° 190. p. 1.ª), come nella prima, 3 è deficiente da 5 per 2, e così pure 7 dal 9 ; e nella seconda 8 eccede 5 per 3, e 'l 4 1 similmente per 3: laonde nella prima 3=5—2, e 7=9—2, e nella seconda 8 = 5 +3, e 4=1+3. Sostituendo, in vece di 3 i numeri 5—2, ed in vece di 7, 9—2, la nuova proporzione sarà 5—2. 5: 9—2. 9, ove si vede chiaramente essere 5—2+9=5+9—2 nella prima; e facendo lo stesso nella seconda, sarà 5+3. 5: 1+ 3. 1, onde 5+3+1=5+1+3.

Dunque in ogni proporzione aritmetica crescente, o decrescente, la somma de' termini estremi è uguale a quella de' termini medj. L' inverso è puranche vero. Cioè, se due numeri sono uguali alla somma di due altri, essi saranno aritmeticamente proporzionali.

Siano due numeri $6+4=7+3$, sarà $6-3=7-4$, e quindi 6. 3: 7. 4.

15 *Corol.* I. Se la proporzione aritmetica sia continua, in tal caso la somma de' termini estremi pareggia il doppio medio.

Sia la proporzione continua 8. 5. 2, ella si potrà esprimere così 8. 5 : 5. 2, e pel teor. precedente, sarà $8+2=5+5=2\times5=10$.

16 *Corol.* II. Essendo in ogni proporzione la somma degli estremi uguale a quella de' medj, segue che, a rinvenire il quarto proporzionale aritmetico, bisogna togliere dalla somma de' medj l'estremo, se è discreta, o dal doppio medio, se è continua, e si avrà il quarto proporzionale. Così 7. 10; 15. x, l' $x=10+15-7=18$ quarto, e nell' altra 11. 9. x, $x=9+9-11=18-11=7$, che è il terzo proporzionale, ed in generale, dati tre termini della proporzione discreta, si rinviene il quarto, sommando i due estremi, e sottraendone il medio, o i due medj, e sottraendone l'estremo.

17 *Corol.* III. Ed essendo nella proporzione continua la somma degli estremi uguale al doppio medio, sarà il solo medio uguale alla metà di quella somma. Laonde per avere il medio aritmetico tra due numeri, fa d'uopo prendere la metà della somma degli estremi. Così tra 11 e 7 si prenderà il medio, facendo $\frac{11+7}{2}=\frac{18}{2}=9$. Onde la proporzione sarà 11. 9. 7, e 9 sarà il medio.

Questo è tutto quello che generalmente conviene alle proporzioni aritmetiche.

Venghiamo alle progressioni.

18 *Teor. In ogni progressione aritmetica sia crescente, sia decrescente, qualunque termine è uguale al primo, più la differenza de' termini ripetuta tante volte, quanti sono i termini precedenti, incluso il primo, ma escluso esso qualunque; e se è progressione decrescente, quello stesso è uguale al primo diminuito della differenza presa l'istesso numero di volte.*

Parte I. Sia la progressione continua crescente ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. Sarà il termine 13 uguale al primo 1, aggiunto ad esso 2, che è la differenza de' termini, ripetuto 6 volte, numero di termini tra 1 inclusivamente, e 13 esclusivamente, cioè $13 = 1 + 2 \times 6$.

Imperocchè essendo 3 uguale al primo più la differenza 2, cioè $3 = 1 + 2$; $5 = 3 + 2$, sarà pure $5 = 1 + 2 + 2$, cioè uguale al primo più due volte la differenza 2; $7 = 5 + 2$, sarà $7 = 1 + 2 + 2 + 2$ uguale al primo, più tre volte il 2, così $9 = 7 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 +$ quattro volte il 2, $11 = 9 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 5$ volte il 2, e così $13 = 11 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 6$ volte il 2.

Parte II. Sia la progressione decrescente ÷ 13. 10. 7. 4. 1 sarà $1 = 13$ diminuito di quattro volte il 3 che è la differenza della progressione.

Perciocchè in questa progressione ogni termine essendo uguale al precedente, diminuito della differenza, sarà primieramente $10 = 13 - 3$, così $7 = 10 - 3 = 13 - 3 - 3$; $4 = 7 - 3 = 13 - 3 - 3 - 3$, e finalmente $1 = 4 - 3 = 13 - 3 - 3 - 3 - 3 = 1$, vale a di-

re il termine 1 è uguale al primo diminuito di 4 volte il 3, differenza della progressione.

19. *Corol.* I. Si rileva da ciò che ogni termine qualunque è uguale ad un' altro, aggiuntavi, o pur toltavi la differenza tante volte, quanto è il numero de' termini, che, incluso quello, precedono questo. Cioè nella progressione ÷ 2. 5. 8. 11. 14 17. 20. 23. ec il termine $17=8+3$ volte la differenza 3 cioè $17=8+3+3+3=8+9=17$; e nell'altra progressione ÷ 20. 16. 12. 8. 4. 1, ec. $4=16-3\times4=16-12=4$, cioè 4 è uguale al 16 meno 3 volte la differenza 4.

20 *Coroll.* II. Si rileva pure, che in una progressione tale, conoscendo un termine, e 'l posto che un altro termine ignoto occupa, ed inoltre la differenza della progressione, si conoscerà il valore di quel termine ignoto, non calcolando gli altri. Così nella serie aritmetica 1. 3. 5. 7. 9. ec. . . 90^{mo}, conoscendo il 3, e la ragione aritmetica, o sia la differenza, che è 2, si conoscerà il valore del novantesimo termine. Perocchè il novantesimo è uguale al primo, aggiuntovi la differenza, moltiplicata per 89, cioè in linguaggio più compendioso sarà $90^{mo}=1+2\times89=1+178=179$, cioè nella serie crescente, e nella decrescente 179, 175. . . . ec. 90^{mo}, $90^{mo}=179-2\times89=179-178=1$. Dunque nella prima serie il novantesimo termine è 179, nella seconda e 1.

21 *Probl. Dati due numeri, inserire tra essi qualunque numero di medj aritmetici.*

Siano i numeri 3, e 122, inserire tra essi 16 medj aritmetici. Essendo dati il primo termine 3, e l'ultimo 122, sarà $122 = 3 +$ la differenza 17 volte, o sia, chiamando D tal differenza, sarà $122 = 3 + 17$ D. Laonde togliendo da ambe le parti il 3, sarà $17\,D = 119$, ed una sola D sarà espressa così $D = \frac{119}{17} = 7$. Adunque si è ritrovata la differenza della progressione da costituirsi co' numeri 3 primo, 122 ultimo. Ritrovata la differenza, si potranno rinvenire i termini successivi (n.° 18), poichè il secondo uguaglia il primo, più la differenza 7, che farà 10, il terzo sarà $10 + 7 = 17$, e così appresso.

22 *Teor. Se tra tutti i termini di una progressione aritmetica s' inserisce un medesimo numero di medj aritmetici: la nuova serie emergente sarà ancora una progressione aritmetica.*

Sia la progressione ÷ 3. 9. 15. 21. 27. 33. 39. (x), la cui differenza è 6. Suppongasi inseriti 3 medj aritmetici tra tutti i termini di essa. Sarà, inserendo tra 3, e 9 tre medj aritmetici (n°. 21) $9 = 3 + 4\,D$ (D dinota la differenza), e togliendo 3 da ambe le parti, sarà $4\,D = 6$, e D sola uguale a $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Inserendo similmente tra 9, e 15 4 medj, sarà $D = \frac{3}{2}$, così pure la differenza della progressione tra 15, e 21 sarà $D = \frac{3}{2}$, e così continuando tra 21, e 27, 27, e 33, 33, e 39, si troverà essere la differenza D delle parziali se-

rie sempre uguale a $\frac{3}{2}$. Laonde, sostituendo tra i termini di (x) i medj che si rinvengono, si avrà la novella serie, la cui differenza è costantemente $\frac{3}{2}$ ∻ 3. $\frac{9}{2}$. $\frac{12}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{18}{2}$. $\frac{21}{2}$. $\frac{24}{2}$. $\frac{27}{2}$. $\frac{30}{2}$. $\frac{33}{2}$. $\frac{36}{2}$. $\frac{39}{2}$. $\frac{42}{2}$. $\frac{45}{2}$. $\frac{48}{2}$. $\frac{51}{2}$. $\frac{54}{2}$. $\frac{57}{2}$. $\frac{60}{2}$. $\frac{63}{2}$. $\frac{66}{2}$. $\frac{69}{2}$. $\frac{72}{2}$. $\frac{75}{2}$. $\frac{78}{2}$, o

(y) 3. $4+\frac{1}{2}$. 6. $7+\frac{1}{2}$. 9. $10+\frac{1}{2}$. 12. $13+\frac{1}{2}$. 15. $16+\frac{1}{2}$. 18. $19+\frac{1}{2}$. 21. $22+\frac{1}{2}$. 24. $25+\frac{1}{2}$. 27. $28+\frac{1}{2}$. 30. $31+\frac{1}{2}$. 33. $34+\frac{1}{2}$. 36. $37+\frac{1}{2}$. 39.

123 *Teor. Se in una progressione aritmetica si prendano ovunque nel suo progresso quattro termini, in modo che tra il primo e 'l secondo intercedano tanti termini, quanti tra il terzo e 'l quarto, questi quattro termini saranno aritmeticamente proporzionali.*

Sia la progressione aritmetica (z) ∻ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. Dico che presi in essa quattro numeri 7, 15, 21, 29, in modo che tra 7, e 15 frappongansi tre termini, e tre tra 21, e 29; cotesti quattro numeri presi saranno aritmeticamente proporzionali, cioè sarà 7. 15 : 21. 29. Imperciocchè essendosi (n.° 18. 2.ª p.) dimostrato, che ogni termine di una serie è uguale ad un' altro, più la differenza moltiplicata pel

numero de' termini frapposti; sarà, chiamando D la quantità di ragione aritmetica tra 7, e 15, (n.° 18) 15=7+D, e togliendo comunemente 7, sarà D=8. Così pure tra 21, e 29 la differenza è D=8. Laonde tra 7, e 15 vi è la stessa differenza, che tra 21, e 29. Perciò starà 7. 15: 21. 29, e formeranno quindi una proporzione aritmetica.

24 *Corol.* Essendo in ogni progressione aritmetica la somma degli estremi uguale a quella dei medj, ne siegue, che la somma degli estremi di quattro termini presi due a due ad uguali intervalli in una progressione aritmetica, è uguale a quella dei medj, come quassù, $7+29=15+21$, o sia $36=36$.

25 *Teor. La somma di tutti i termini di una progressione aritmetica qualunque è uguale alla metà della somma degli estremi moltiplicata pel numero de' termini: ovvero alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero de' termini.*

Sia la progressione crescente.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. (u) e
3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. (w)

Dico essere la somma di tutti i suoi termini uguale o a $(3+25)\times\frac{12}{2}$, o a $\frac{3+25}{2}\times 12$, cioè nel primo caso a $28\times 6=168$, e nel secondo a $\frac{28}{2}\times 12$ cioè $14\times 12=168$.

Due casi possono occorrere, o il numero dei termini delle serie è pari, o è dispari. Sia primieramente pari, come nella serie (u). E poichè si è dimostrato, che in una serie prendendo quattro termini equidistanti dagli estremi, essi formeranno pro-

porzione aritmetica, la somma de' termini estremi è uguale a quella dei medj (n.° 14. 2.ª p.), ne siegue che le somme saranno tante di numero, quante le coppie de' termini equidistanti dagli estremi, e queste coppie degli estremi sono uguali alla metà del numero de' termini di quella. Dunque la progressione avrà tante coppie, quanto è la metà del numero dei termini della progressione. Ma la somma de' termini di tutte quelle coppie è uguale alla somma di tutti i termini della progressione. Onde tutte quelle coppie sono uguali alla somma di tutti i termini della progressione. Perciò ec.

Così nella progressione (u) essendo sei le coppie de' termini, sarà la somma di essa, cioè Somma $=(3+25)\times\frac{12}{6}$, o pure $S=\frac{3\times25}{2}\times12=14\times12=168$.

Parte II. Sia ora dispari il numero de' termini, come nella (w). In tal caso il termine di mezzo forma cogli estremi una proporzione continua, onde vi sarà un numero di coppie uguale alla metà del numero de' termini della progressione, cioè una coppia moltiplicata per la metà del numero di tutti i termini. Ma il numero delle coppie insieme col medio uguagliano la somma di tutti i termini della progressione. Dunque ec.

Così nelle serie (w) le coppie essendo $3+35$, $7+31$, $11+27$, $13+23$, 19, quattro, e mezza dinotata dal 19, termine medio, e tutti questi numeri componendo la serie, ed inoltre essendo tutte eguali, sarà $S=(3+35)\times4+\frac{1}{2}$, o sia $S=(3+35)\times\frac{9}{2}$

27. *Coroll.* I. Essendoci in una progressione aritmetica cinque quantità a considerarsi, cioè primo termine, ultimo termine, numero di essi, somma di essi, somma di tutti i termini, differenza fra essi termini, se sieno note tre, se ne potrà conoscere un'altra. Adunque segue.

Corol. I.° Essendosi dimostrato (n.° 18. 2.ª p.) che l'ultimo termine è uguale al primo, aggiunta la differenza, se la serie è crescente, o tolta, se è decrescente, moltiplicata per lo numero de' termini tra l'ultimo esclusivamente, e 'l primo inclusivamente, sarà noto tale ultimo, se sappiasi la differenza, il primo termine, e 'l numero di essi.

29 II.° Essendo la somma della progressione uguale alla mezza somma degli estremi moltiplicata pel numero de' termini, sarà nota quella, se diansi separatamente il primo, e l'ultimo termine, e 'l numero di essi.

30 III.° Essendo l'ultimo termine uguale al primo, aggiunta la differenza moltiplicata per la metà del numero dei termini, sarà nota la differenza, conoscendo il primo, e l'ultimo, e il numero dei termini.

31 IV.° Conoscendosi la somma de' termini, e gli estremi, si avrà il numero de' termini.

32 V.° Conoscendosi il primo, e l'ultimo termine, e il numero de' termini, si conoscerà pure la differenza di essi. E sapendosi la somma dei termini, il numero de' termini, ed uno degli estremi, si potrà trovare la differenza.

33 VI.° Conoscendosi la somma de' termini, il

numero di essi, e la differenza, si potrà ritrovare ciascun termine in particolare.

CAPITOLO III.

DE' LOGARITMI.

34 Dall' esposizione della teoria delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche, non meno che di quella delle progressioni rilevasi tra esse una corrispondenza abbastanza marcata. Perciocchè nella proporzione aritmetica, dati due estremi, ed un medio, si otterrà l' altro medio, sottraendo dalla somma di quelli il dato numero medio; del pari nella geometrica proporzione, se il prodotto degli estremi si divida per lo medio dato, si otterrà l' altro medio, e viceversa.

35 Nella progressione aritmetica si è rilevato essere un qualunque termine uguale al primo, aggiunta, o tolta la differenza de' termini un numero di volte dinotato dalli termini posti tra il primo inclusivamente, e l' altro esclusivamente. Nella progressione geometrica poi, un termine qualunque è uguale al primo moltiplicato, o diviso per la ragione de' termini elevata alla potenza dinotata dal numero de' termini, che precedano (n.° 7) quello, di cui si tratta.

36 Adunque per ottenere analoghi risultati, le aritmetiche proporzioni, e progressioni impiegano la somma, e la sottrazione, mentre che le proporzioni, e progressioni geometrice adoprano la moltiplicazione, e la divisione.

37 Tratto Nepero Barone di Marchiuston in Iscozia da tanta analogia che regna tra quelle, a fin di abbreviare le tediose operazioni di moltiplicazione, e di divisione, che s' incontrano nelle astronomiche scienze specialmente, si avvisò di sostituire ai numeri che sono in progressione geometrica quelli che lo fossero in aritmetica, merce i quali le moltiplicazioni, ed elevazioni a potenza riduconsi ad addizioni, e le divisioni, e le radici, a sottrazioni; le cui tavole egli pubblicò in Edimburgo l' anno 1614. Chiamò poi egli que' numeri in progressione aritmetica Logaritmi, o indici di quelli che formassero una serie geomettica.

38 Siano dunque le due progressioni.

Progressione aritmetica ÷ 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Progressione geometria ∺ 3: 12: 46: 192: 768: 3072: 12288: 49152: 196608: 786432.

In queste due serie ciascun termine della superiore è logaritmo di ciascuno della inferiore. Se nelle due serie si prendono quattro numeri, tali, che se ne frappongono tanti tra il primo, e secondo, quanti tra il terzo, e quarto, e lo stesso si pratichi nè corrispondenti della progressione geometrica, nasceranno in ambo due proporzioni, l' una aritmetica, l' altra geometrica (n.° 22) Tutte le operazioni, che nella serie superiore si praticheranno per via di somma, e sottrazione, si faranno nella seconda colla moltiplicazione, e colla divisione. Su questo principio sono costruite le Tavole, che volgarmente chiamansi logaritmiche.

39 La scelta della progressione geometrica, e della corrispondente aritmetica è affatto arbitraria, ma nelle tavole ordinarie si è assunta per la geometrica la progressione decupla ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000, come quella che serve di fondamento alla numerazione, e per la progressione aritmetica, o de' logaritmi, la serie aritmetica naturale crescente, come è ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9., ec. essendo questa la più semplice di tutte.

Dallo stabilimento di queste due progressioni, seguono diverse verità, che quì espongo.

40 *Teor.* 1.° *Il logaritmo dell'unità è zero.*

2.° *Il logaritmo di un numero maggiore di* 1, *e minore del* 10 *è maggiore di zero, o sia positivo, ma fratto.*

3.° *Il logaritmo del numero minore di* 1, *cioè del fratto, è minore del zero, ovvero negativo, detto altrimenti logaritmo difettivo.*

Parte. I. Imperciocchè essendo ciascun termine della serie aritmetica logaritmo di ciascun termine della geometrica, e lo zero della prima corrisponde ad 1 nella seconda. Sarà zero logaritmo di 1.

Parte II. Inoltre essendo i medj aritmetici tra 0 ed 1 logaritmi de' corrispondenti medj geometrici tra 1, e 10 della serie geometrica, e cotesti medj aritmetici crescono di sopra al zero sino a divenire 1, o presso, sarà perciò il logaritmo di un numero maggiore di 1, e minore del 10, maggiore di zero, e minore di 1, perciò è fratto, ma è positivo.

Parte. III. Prolungando le due progressioni a

sinistra si avranno nella serie aritmetica —3—2—1+0, e nella geometrica $\frac{1}{1000}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10}+$ ec, ciascun termine della progressione aritmetica negativa sarà logaritmo di ciascun termine decrescente della geometrica, cioè di una frazione; e sono quelli negativi. Dunque i logaritmi di numeri minori di 1, cioè di un fratto, sono negativi.

41. *Teor. I numeri maggiori del 10, e minori di 100 hanno per logaritmo l' unità ed un fratto decimale.*

Quei maggiori di 100, e minori di 1000, hanno per logaritmo il 2 con un fratto decimale. Così i superiori a 1000 e minori di 10000 hanno il 3 col decimale, e così di seguito.

Imperocchè per ottenere i logaritmi de' numeri tra 10 e 100 fa d'uopo prendere nella progressione aritmetica i medj aritmetici tra 1 e 2: questi saranno maggiori di 1, e minori di 2. Ma sono essi logaritmi de' corrispondenti medj geometrici tra 10 e 100. Perciò il logaritmo di un numero maggiore del 10, e minore del 100 è composto di 1 ed una frazione decimale. Similmente i medj aritmetici tra 2 e 3, che sono logaritmi de' medi geometrici tra 100 e 1000 nella progressione geometrica, sono maggiori del 2 e minori del 3, essi costeranno del numero intero 2, e di un decimale. Così pure i logaritmi de' numeri fra 1000 e 10000 costeranno del 3 e di un decimale. Laonde rimane dimostrato il Teor. proposto.

42. *Def.* Il numero intero che si trova nel lo-

garitmo si appella caratteristica, e 'l decimale aggiunto si chiama mantissa: Sia 2, 1583625 il logaritmo del numero 144, il 2 è la caratteristica, il decimale 1583625 è la mantissa.

43 *Coroll.* Essendo 1 caratteristica del logaritmo di 10, 2 caratteristica del logaritmo di 100, 3 di 1000, 4 di 10000, ec.; ed essendo 100 decuplo del 10, 1000 centuplo del 10, 10000 milluplo del 10, segue che aggiungendo 1 alla caratteristica del logaritmo di 10, il numero cui quello appartiene rimane moltiplicato per 10, se si aggiunge 2, il numero rimane moltiplicato per 100, se 3 per 1000, onde in generale per moltiplicare un numero più volte per 10, si aggiungeranno alla caratteristica del logaritmo del numero tante unità, quante decine di volte si voglia replicare il numero: così appartenendo il log. 2,1583625 al numero 144, se al 2 si aggiungono 3 unità, sicchè diventi 5,1583625, un tal logaritmo apparterrà al numero 144 moltiplicato per 1000, cioè al numero 144,000.

44 *Teor. Il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma de' logaritmi di ciascun fattore.*

Siano i due numeri 3 e 4, e si moltiplichino tra loro, onde nasca il prodotto 12. Dico essere il logaritmo di 12 uguale al logaritmo di 3; più il logaritmo di 4.

Si è dimostrato (n.° 21 p. 1.) che il prodotto sta ad uno de' fattori, come l'altro fattore all'unità. Sarà 12: 4:: 3: 1. Ma alla proporzione geometrica 12: 4:: 3: 1 corrisponde una proporzione aritmeti-

ca di numeri, i quali saranno perciò logaritmi di quelli (n.° 38. p. 2.ª) Sarà quindi log. di 12. log. 4: log. 3. log. 1. Ed essendo questi aritmeticamente proporzionali, sarà (n.° 14. p. 2.ª) la somma degli estremi uguale alla somma de' medj. Cioè log. di 12 +log. di 1=log. di 3+log. di 4. Ma il log. di 1 è zero. Dunque log. di 12=log. di 3+log. 4

Laonde il logaritmo del prodotto è uguale ai logaritmi de' fattori.

45 *Coroll.* I. Se i fattori siano tre, sarà pure il logaritmo del prodotto de' tre uguale alla somma de' logaritmi de' fattori, e lo stesso vale se siano più. Così 5×6×7=210, il logaritmo di 210 uguaglia il log. 5+log. 6+log. 7.

46 *Coroll.* II. Se i fattori siano eguali, il logaritmo del loro prodotto sarà uguale al logaritmo di uno di essi moltiplicato per lo numero de' fattori Quindi il logaritmo del quadrato è uguale al doppio logaritmo della radice, quello del cubo al triplo logaritmo della radice cubica, e così delle altre potenze.

47 *Coroll.* III. Viceversa il logaritmo della radice quadrata è la metà del logaritmo del quadrato, il logaritmo della radice cubica è la terza parte del logaritmo del cubo, ec. Laonde, per avere il logaritmo della radice quadrata, bisogna prendere la metà del logaritmo del quadrato, e per avere il logaritmo della radice cubica bisogna prendere il terzo di quello del cubo, ec.

48 *Teor. Posto il logaritmo di 1 uguale a zero: il logaritmo del quoto della divisione di un*

numero per un altro è uguale alla differenza del logaritmo del dividendo, e del divisore.

Siano due numeri 48, e 6. Dico essere il logaritmo del quoto di 48 diviso per 6, cioè il logaritmo di 8 uguale alla differenza del logaritmo di 48 da quello di 6, cioè log. $\frac{48}{6}$ = log. 48—log. 6.

Imperocchè dalla natura della divisione (n.° 38 p. 1.ª) il dividendo è al divisore, come il quoto all'unità, cioè 48 : 6:: 8:1 faranno una proporzione geometrica, e i termini della proporzione aritmetica che loro corrisponde, saranno logaritmi de' termini della geometrica proporzione 48: 6:: 8:1. Onde si avrà log. 48. log. 6: log. 8. log. 1 in aritmetica proporzione; e si è dimostrato (n.° 16, p. 2.ª) che per avere l' estremo, come è log. 8, bisogna sottrarre dalla somma de' termini medj il termine estremo, sarà per ciò log. 8=log. 48+log. 1—log. 6; ma il log. 1 è zero (n.° 40. p. 2.ª), perciò log. 8=log. 48—log. 6. Vale a dire il logaritmo del quoto uguaglia il logaritmo del dividendo, meno il log. del divisore.

49 *Coroll.* I. Segue quindi che la somma del logaritmo del quoto, e del divisore sia uguale a quella del dividendo.

50 *Coroll.* II. Volendosi dunque dividere un numero per un altro, bisognerà prendere il logaritmo del dividendo, e da quello torre il logaritmo del divisore, il rimanente numero sarà il logaritmo del quoto.

51 *Scol.* Essendo la frazione una divisione indicata, il cui numeratore è il dividendo, e 'l di-

nominatore il divisore, si avrà il di lei logaritmo, togliendo dal logaritmo del numeratore quello del denominatore, che nel caso sia fratto spurio, sarà positivo, nel caso sia vero sarà negativo, o logaritmo difettivo. Così log. $\frac{1}{100}$=log. 1—log. 100=0—2, e log. $\frac{100}{10}$ log. 100—log. 10=2—1=1. Ma di ciò diremo appresso più diffusamente.

52 *Probl. Ritrovare il logaritmo di qualunque numero, e costruire quindi il canone logaritmico pe' numeri in serie naturale.*

Debbasi ritrovare il logaritmo del numero 7.

I.° Si ponga la progressione geometrica ∺ 1,00000 10,00000, 100,00000, 1000,00000, 10000,00000, 100000, 00000, e la progressione aritmetica, i cui termini siano logaritmi de' termini di quella ÷ 1,0000000, 2,0000000, 3,0000000, 4,0000000, 5,0000000, ai quali si sono aggiunti i zeri per approssimare con decimali i logaritmi de' numeri intermedj ai termini della serie geometrica.

II.° Chiaminsi A, e B il primo, e il secondo termine della serie geometrica, che sono 1, e 10, si prenda tra essi (n.° 216. p. 1.ª) il medio proporzionale C, il quale abbia anche tante cifre decimali, quante ne hanno A, e B, che sarà minore di 7,00000, il quale medio C rimane inscritto nella tavola come vi rimarranno tutti gli altri medj da prendersi dinotati da diverse lettere alfabetiche.

III.° Prendasi di poi tra B, e C un medio geometro D, accompagnato dallo stesso numero di cifre

decimali, il che s' intenda in seguito per gli altri, che si prenderanno, il quale sarà parimente minore del 7,000000.

IV.° Prendasi anche un medio proporzionale geometrico tra D e B, che si dica E, il quale è 7, 498982, maggiore di 7,000000. E così prendendosi il medio tra D, ed E, che sia F, tra F, ed E che sia G; tra G ed E, che sia H e così gli altri I, K, L, M, N, ec. finchè si pervenga al medio proporzionale geometrico Z=7.000000, che non differisce dal 7 nè per eccesso, nè per difetto.

Come si è praticato pe' medj geometrici, del pari si prendano i medj aritmetici tra i logaritmi corrispondenti ad essi numeri nella serie aritmetica. Cioè si trovi il medio aritmetico tra 0,0000000 ed 1,0000000, il primo che è logaritmo di A, il secondo di B. Questo sarà espresso da 0, 5000000, e sarà il logaritmo di C, che si pone nella tavola a destra di esso C. Nel modo stesso si rinvengono i logaritmi de' medj geometrici D, E, F, G, ec. corrispondenti, che tutti sono situati a destra. Ciò fatto, si avrà in fine il logaritmo del 7,000000, che è il numero decimale 0,8450980.

La dimostrazione è chiara dalle stesse operazioni analoghe a ciò che fu detto (n.° 38. p. 2.ª)

53 *Corol.* Con questo metodo si rinvengono i logaritmi dei numeri primi 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13: vi sono però de' mezzi abbreviativi. Imperocchè ritrovato il logaritmo di 9 per esempio, si otterrà il logaritmo della sua radice 3, prendendo la metà del suo logaritmo (n.° 47. p. 2.ª). Similmente ritro-

vato il logaritmo di 6 si potrà avere quello del 2; perciocchè, dividendosi 6 per 3, si ha 2 per quoto; ed essendo il logaritmo del quoto uguale al logaritmo del dividendo sottrattone quello del divisore. Sottraendo dunque dal logaritmo di 6 il logaritmo del 3, si ha quello del 2. Nel modo stesso, sottraendo dal logaritmo di 10 il logaritmo di 2, si avrà il logaritmo del 5, che è il quoto di 10 per 5, e così si praticherà per altri numeri proporzionalmente.

54 *Coroll.* II. Ritrovati i logaritmi de' numeri primi, si calcoleranno i logaritmi de' numeri composti; perciocchè duplicando, triplicando, quadruplicando, ec. il logaritmo del 2, si avrà quello del suo quadrato 4, del suo cubo 8, e così del resto della serie di potenze del 2, come 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ec. e facendo lo stesso del logaritmo del 3, si avranno quelli della serie 3, 9, 27, 81, 243, ec. E si avranno i logaritmi del prodotto dei numeri, conoscendo i logaritmi de' loro fattori, con aggiungere tra loro i logaritmi di essi fattori.

55. *Scolio.* Con questo mezzo, sebbene l'analisi sublime ne offra metodi più spediti, si sono costrutte le tavole, o sia il canone logaritmico per i numeri naturali da 1 fino a 20000, e da 90000 fino a 100000 da Errico Briggio Inglese dell' Accademia di Oxford, e ciò per consiglio di Nepero primo inventore di questi logaritmi. Adriano Ulacq riempì il vuoto tra 20000, e 90000 poco dopo. Nelle tavole volgari però si ha soltanto il canone logaritmico pe' numeri da 1 fino a 10000; quelle di Gardiner sono anche più comode.

L' uso de' Logaritmi riducesi a trasmutare la moltiplicazione in addizione, e la divisione in sottrazione. Il che è mostrato da' seguenti problemi.

56. *Probl. Moltiplicare due numeri tra loro, il cui prodotto però sia minore del massimo numero delle tavole volgari* 10000.

Siano dati i numeri 13, e 18, e si vogliano moltiplicare tra loro.

Si trovino i logaritmi loro nelle Tavole, e si dispongano l' uno sotto l' altro, che siano.

log. 13.	. . .	1, 11394
log. 18.	. . .	1, 25528
Somma.	. .	2, 36922

Se ne prenda la somma; si trovi nelle tavole cotesto logaritmo, alla sua sinistra corrisponderà il numero 234, che è appunto il prodotto di 18 per 13.

Imperocchè essendosi dimostrato (n.° 44. p. 2.ª) che il logaritmo del prodotto è uguale alla somma de' logaritmi de' fattori; sarà il numero 234 il prodotto 18 per 13, per avere un tal numero il logaritmo 2,36922 somma di logaritmi di 18 e di 13.

57. *Coroll.* I. L' elevazione a quadrato, cubo, quadrato-quadrato, ec. essendo un' operazione come la moltiplicazione, nella quale i fattori sono uguali, i logaritmi loro saranno pure uguali, onde il logaritmo del quadrato è doppio di quello della radice, quello del cubo è triplo, e così per le potenze superiori. Laonde volendosi fare il quadrato di 4, si

prenderà il di lui logaritmo che è 0,60206, e si duplicherà, il che da 1,20412, che è il logaritmo di 16 quadrato del 4; si triplicherà, il che darà 1, 80618 logaritmo di 64 cubo del 4, si quadruplicherà, e si avrà il logaritmo del quadrato-quadrato del 4, che è 256, il cui logaritmo è 2, 40824, e così per le altre potenze superiori.

58 *Coroll.* II. Reciprocamente. Volendo la radice quadrata di un numero, cerchisi nelle tavole il suo logaritmo, e se ne prenda la metà, si avrà il logaritmo della radice di quel numero, se ne prenda il terzo si avrà la cubica; e così la quarta, ec. Per esempio vogliasi la radice quarta, o quadrata-quadrata di 81. Si ritrovi nelle tavole il logaritmo di 81, il quale è 1,90849, e se ne prenda la quarta parte, che è 0,4771212. Si ritrova questo logaritmo appartenere al numero 3, onde esso è la radice quarta di 81.

59 *Scol.* Il logaritmo del medio proporzionale tra due numeri è lo stesso che il logaritmo della radice del prodotto di que' numeri. Onde per aversi bisogna prendere la mezza somma de' logaritmi dei numeri dati.

Esempio tra 8, e 2 si voglia il medio geometrico. Sia x tal medio. Sarà x quadrato uguale a $8 \times 2 = 16$, e quindi logaritmo di x è uguale alla metà del logaritmo di 16, che sarà 0, 60206, al quale corrisponde il numero 4, e desso è appunto il medio proporzionale.

60 *Probl. Dividere un numero per un' altro.* Sia il numero 288, fa d'uopo dividerlo per 24?

Si prenda il logaritmo di 288, e di 24. Si scrivano l'uno sotto l'altro, cioè il logaritmo del dividendo sopra, e del divisore sotto; e si sottragga il secondo dal primo, sarà la loro differenza il logaritmo del quoziente, che sarà propriamente quel numero, cui corrisponde nelle tavole.

Sia dunque

log. 288=2, 45939. . . . . . . A
log. 24=1, 38021. . . . . . . B

Log. della diff.=1, 07918. . . . . . . D

Si ritrovi tal logaritmo nelle tavole, trovato, corrisponde al numero 12 che sarà il quoziente di 288 per 24.

Perciocchè essendo il logaritmo del quoto uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore (n.° 48. p. 2.ª), ed il logaritmo del dividendo essendo A, quello del divisore B, sarà D, quello del quoto, ed esso quoto sarà appunto 12, che tiene per logaritmo D.

61. *Coroll.* Essendo il logaritmo del quoto uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore, è chiaro che se la caratteristica del logaritmo del dividendo sia diminuita di 1, il numero, cui appartiene il logaritmo diminuito, rimane diviso per 10, se si diminuisce di 2, rimarrà il numero diviso per 100, se di 3 per 1000, se di 4 per 10000.

Per esempio il numero 34000 avendo per logaritmo 4,5314789, il numero $\frac{34000}{10} = 3400$ avrà

per logaritmo 3,5314789, $\frac{34000}{100}=340$ avrà per logaritmo 2,53148, $\frac{34000}{1000}=34$ avrà per logaritmo 1, 53148; in fine il numero $\frac{34000}{10000}=3, 4$ ha per logaritmo 0,53147, ec.

62 *Probl. Ritrovare il quarto proporzionale.*

Dati i tre numeri 9, 27, 54, ritrovare il quarto ad essi proporzionale. Si aggiungano fra loro i logaritmi de' termini secondo, e terzo, cioè di 27, e 54, e si sottragga il logaritmo dell' estremo 9, il residuo sarà il logaritmo del quarto termine, che nelle tavole darà il numero proporzionale ai tre dati.

L' operazione.		
log. di 54	=	1, 73239
log. di 27	=	1, 43136
Somma. . . .		3, 16375
log. di 9. . .		0, 95424
Residuo . . .		2, 20951

A questo logaritmo, che è l' eccesso della somma de' logaritmi de' termini medj della proporzione sul logaritmo dell' estremo 9, corrisponde il numero 162, che è il quarto termine proporzionale ai tre 9, 27, 54. Onde la proporzione sarà 9: 27:: 54: 162.

Imperocchè alla proporzione geometrica 9: 27:: 54: 162 corrisponde una proporzione aritmetica di cui, per ottenere il quarto aritmetico fa d' uopo dalla somma de' medj togliere l' estremo (n.° 16. p. 2.ª) ed essendo quei termini aritmeticamente proporziona-

li ; logaritmi de' termini geometrici : perciò , dalla somma di logaritmi de' medj togliendo l'estremo , si ha il logaritmo dell'altro estremo. C. B. D.

63. *Corol.* Volendosi il terzo proporzionale, bisognerà dal doppio logaritmo del secondo sottrarre quello del primo (n.° 16. p. 2.ª). Così per avere il terzo proporzionale dopo 16, e 32, sarà lo stesso che 16 : 32 :: 32 : x. Sarà il logaritmo dell'x uguale a log. 32+log 32—log. 16, cioè 2 log 32—log. 16. Ed essendo il logaritmo di 32=1, 50515, sarà il suo doppio 3,01030, dal quale sottraendo il logaritmo di 16, che è 1,20412, il residuo 1, 80618 indicherà il logaritmo del terzo proporzionale, al quale si troverà corrispondere il numero 64.

64. *Probl. Determinare il logaritmo di un numero maggiore del massimo numero che è nelle tavole.*

Sia da ritrovarsi il logaritmo del numero 788873 che sorpassa il massimo delle tavole di La Lande, che è 10000.

I.° Si separino verso destra le due ultime cifre di tal numero, con che (n.° 41. p. 1.ª) diviene 100 volte minore, come 7888,73, cioè settemila ottocento ottantotto, e 73 centesimi, e si prenda il logaritmo di 7888, che sarà 3,89697.

II.° Si prenda pure il logaritmo del numero 7889 prossimamente maggiore di 7888 per l'eccesso 1, o sia cotal logaritmo 3, 89702, e si noti la differenza di questo logaritmo da quello, la quale è 0,0000551.

III.° Di poi s'instituisca questa proporzione geometrica, l'unità, che è la differenza di numeri

7888, e 7889 a 0,73, che è la differenza di 7888, 73 a 7888, così la differenza de' logaritmi de' numeri 7888, e 7889 ad un quarto, o sia 1: 0,73:: 0,0000551 : $x = \frac{0,0000551 \times 0,73}{1} = 0,0000402$, ributtando le tre ultime cifre come quelle che esprimono una grandezza assai piccola. Cotesto quarto ritrovato si aggiunga al numero 3, 8669669, logaritmo di 7888, onde si abbia 3,8970071 per lo logaritmo del numero 788873. Aggiungendo di poi due unità a cotesto logaritmo, il che moltiplica per 100 il numero, cui appartiene (n.° 43. p. 2.ª), sarà 5,8970071 il logaritmo del numero proposto 788873, che è 100 volte maggiore del 7888,73.

Imperocchè se il numero 7888 si aumentasse dell' intera unità, il di lui logaritmo dovrebbe aumentarsi di 551 parti, qual'è appunto la differenza di due logaritmi superantisi nell' intera unità : ma il numero 7888 cresce soltanto di 0, 73, perchè quel numero 788873 diviso per 100 dà 7888,73. Per la qual cosa devesi indagare per la regola del tre quanto debba aumentarsi il logaritmo del medesimo numero rispetto alle 0,73, le quali sono minori dell' unità. Indagato ciò, si rinviene doversi il logaritmo di 7888, che è 3,89697 aumentare di 0,0000402, onde sorge il logaritmo 3,8970071 per il numero 7888,73. E siccome cotesto numero è 100 volte minore del 788873, essendosi diviso per 100, separando le cifre 73, si avrà perciò il logaritmo del numero 100 volte maggiore di 7888, aggiungendo alla caratteristica 3 due unità, il che molti-

plica per 100 il numero cui appartiene (n.° 43. p. 2.ª) onde diviene 788873.

67. *Corol.* Se mai si dasse un numero maggiore di 10,000,000, che raro avviene in pratica, questa regola non sarebbe sufficiente, perciocchè crescendo i numeri assoluti, le differenze de' logaritmi decrescono, e finalmente svaniscono, e divengono i logaritmi eguali. Così i numeri 2656385774, e 2656385775; che differiscono per l' unità, hanno il medesimo logaritmo 9,4242911 come appare delle grandi tavole di Briggio. Non può perciò instituirsi la regola di proporzione, mancandovi la differenza de' logaritmi.

68. *Coroll.* II. I logaritmi de' numeri grandissimi per es. di 15 cifre che non molto differiscono tra loro calcolati sino alla decima cifra decimale si possono prendere per eguali. Il che giova notare.

70. *Probl. Ritrovare il logaritmo di una frazione, sia spuria, sia vera.*

I.° Sia data la frazione spuria $\frac{38}{3}$, che nasce da $12 + \frac{2}{3}$, si domanda il suo logaritmo.

Si prendano i logaritmi di 38, e di 3, e si scrivano il maggiore, cioè quello di 38 sopra, e quello di 3 sotto, come si veggono.

log. 38	1,57978
log. 3.	0,47712

E se ne prenda la differenza 1,10266

Di poi si vegga se nelle tavole vi si contenga

cotesta differenza per intera. Se ciò sia, si avrà il numero, che le corrisponde. Se i termini della frazione spuria non siano di quelli che si contengono nelle tavole, in tal caso si determinerà il loro logaritmo, come si è praticato nel Probl. precedente, il che mostrerassi quaggiu con un esempio.

II.° Sia poi vera la frazione, come $\frac{3}{8}$, di cui si voglia il logaritmo. Si prenda il logaritmo, tanto del numeratore, che del denominatore, e si noti col segno — la differenza dei loro logaritmi, essendo 8 maggiore del 3, così pure sarà il logaritmo di 8 maggiore di quello del 3. Si prenda dunque tal differenza così:

log. 3.	0,47712
log. 8.	0,90309
Differenza negativa	— 0,42597

Dico essere la prima differenza positiva il logaritmo della frazione spuria $\frac{38}{3}$, o di $12+\frac{2}{3}$, la seconda negativa il logaritmo della frazione genuina $\frac{3}{8}$

Imperciocchè in ambo i casi, essendo i fratti divisioni indicate, in cui il numeratore è il dividendo, il denominatore il divisore, ed il logaritmo del quoto (n.° 48. p. 2.ª) è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore; perciò nel primo caso la differenza è positiva, essendo il dividendo maggiore del divisore, e nel secondo è negativa, perchè il logaritmo del dividendo è minore di quello del divisore.

71 *Coroll.* Volendosi il logaritmo di un'intero unito ad un fratto, bisognerà ridurre l'intero, e 'l fratto ad un solo fratto spurio, ed usare il metodo prescritto (n.° 70, p. 2.ª).

72 *Coroll.* II. Ogni logaritmo affetto dal segno — appartiene ad una frazione genuina.

73 *Probl. Dato il logaritmo negativo, ritrovare il fratto, cui quello appartiene.*

Sia dato il logaritmo negativo —0,22185, ritrovare la frazione, che li risponde.

I. Si prenda il logaritmo del 100, del 1000, o di altro termine della decupla progressione. Sia per esempio 3,00000, che è il logaritmo di 1000, e si sottragga da esso il dato logaritmo negativo — 0,22185, cioè.

log. 1000 . . .	3,00000
log.	— 0,22185
log. del residuo . . .	2,77815

II. Si cerchi nelle tavole il numero, cui corrisponde il logaritmo 2, 77815, il quale trovasi essere 600,

III. Dividasi 600 per 1000, onde si abbia $\frac{600}{1000}$ che equivale a $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. Sarà $\frac{3}{5}$ la frazione, cui appartiene il logaritmo negativo—0, 22185.

Perciocchè coll'essersi presa la differenza del 3. e —0,22185, non si è fatto altro, che accrescere la caratteristica di esso logaritmo negativo di 3, essendo divenuta 3—0,22185, cioè, fatta la sottra-

zione indicata, 2,77815. Ma quando alla carat- teristica di un logaritmo si aggiunga 1, 2, 3, unità, il numero cui quel logaritmo appartiene rimane mol- tiplicato per 10,100,1000, (n.° 43. p. 2.ª); essendosi aggiunto dunque il 3, il numero sarà 1000 volte maggiore del vero, come sarebbe 600. Bisogna per- ciò per avere il vero dividerlo per 1000, onde si avrà $\frac{600}{1000}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

74 *Teor.. Il logaritmo di una frazione è lo stesso della sua inversa.*

Sia il fratto $\frac{3}{5}$. Il logaritmo di $\frac{3}{5}$ è lo stesso di $\frac{5}{3}$, però il primo è negativo, il secondo è po- sitivo.

Imperciocchè essendo $\frac{5}{3}:1::1:\frac{3}{5}$ (n.° 208. p. 1.ª), i logaritmi loro saranno in proporzione aritmetica, e quindi log. $1+$ log. $1=$ log. $\frac{5}{3}+$ log. $\frac{3}{5}$. Ma i logaritmi dell'unità sono zero (n.° 40. p. 2.ª). Dunque log. $\frac{5}{3}+$ log. $\frac{3}{5}$ sono anche zero, il che non po- trà avvenire se cotesti due logaritmi non siano ugua- li, perocchè essendo log. $\frac{3}{5}$ negativo, distruggerassi con logaritmo di $\frac{5}{3}$ che è positivo. Infatti log. $\frac{5}{3}$

$=$ log. 5 $-$ log. 3 $=$ 0,69897 $-$ 0,47712 $=$ 0,22185; log. $\frac{3}{5}$ poi essendo $=$ log. 3 $-$ log 5, sarà $=$ 0,47712 $-$ 0,69897, che si riduce $-$ 0,22185 : onde log. $\frac{5}{3}$ $=$ log. $\frac{3}{5}$, l'uno positivo, l'altro negativo.

75 *Probl. Moltiplicare un numero intero per un fratto.*

Sia da moltiplicarsi 36 per $\frac{3}{8}$.

I. Prendasi il logaritmo di 36, che è 1, 55630, prendasi anche il logaritmo negativo della frazione $\frac{3}{8}$, che è $-$ 0,42597.

II. Si prenda la differenza di cotesti logaritmi, cioè.

log. 36	$=$	1 , 55630
log. $\frac{3}{8}$	$=$	$-$ 0 , 42597
Differenza		1 , 13033

Cotesta differenza esprimerà il logaritmo del prodotto 36 $\times$ $\frac{3}{8}$, che apparirà dalle tavole.

Imperocchè il logaritmo del prodotto è uguale al logaritmo de' fattori ; ed essendo l'un fattore 36, il suo logaritmo è 1,55630 , e dovendosi unire ad

esso il logaritmo dell' altro fattore $\frac{3}{8}$, la quale essendo frazione, avrà negativo il logaritmo, onde deve sottrarsi dal logaritmo di 36, e si avrà così la differenza 1,13033.

76 *Coroll.* Se si volesse moltiplicare un fratto per un' altro, per esempio $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, il loro prodotto essendo $\frac{5\times3}{7\times4}$, il logaritmo di esso è uguale alla somma de' logaritmi de' fattori del numeratore, diminuita della somma de' logaritmi de' fattori del denominatore (n.° 48. p. 2.ª). Prendasi.

log. 5 = 0, 69897
log. 3 = 0, 47712

1.ª Somma 1, 17609
log. 7 = 0, 84510
log. 4 = 0, 60206

2.ª Somma 1, 44716

Sottraggasi dalla prima somma, la seconda, si avrà 1.ª 1, 17609
2.ª 1, 44716

Differenza. . . . . — 0, 27107

Sarà questo il logaritmo, del prodotto delle due frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$, ma negativo. In seguito aumento di 4 la caratteristica di tal logaritmo, il che è

moltiplicare il numero, che gli appartiene per 10000, e si avrà 4—0,27107, e scrivendo.

log. 10000 = 4, 00000
log. negativo — 0, 27107

Residuo . . . 3, 72893

Un tal residuo sarà il logaritmo del prodotto delle frazioni 10000 volte maggiore del vero. Trovato cotal logaritmo, prossimo, come è 3,72892, differente da quello per $\frac{1}{100000}$, il che è sufficiente, il numero corrispondente è 5357, il quale è uguale, meno una centomilesima, al prodotto delle due frazioni moltiplicate per 10000. Laonde dividendolo per 10000, il che si ottiene separando verso destra quattro cifre (n.° 116. Reg.), si avrà il prodotto delle frazioni espresso da 0,5357 sensibilmente.

77 *Probl. Dividere una frazione per un' altra frazione.*

Sia la frazione $\frac{5}{7}$ da dividersi per $\frac{3}{4}$, cioè trovare il valore di $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7}$ (n.° 66. p. 1.ª).

I. Si prenda la somma de' logaritmi de' fattori del numeratore 5, e 4, e quella de' fattori 3, e 7 del denominatore.

II. Si prenda la differenza negativa di tali somme.

III. Si aumenti cotesto logaritmo negativo dello caratteristica 3, e si ricavi la differenza del 3

logaritmo di 1000, e del logaritmo negativo, e si trovi il numero cui corrisponde il logaritmo rimanente, o vero, o prossimo al vero.

IV. Finalmente separinsi 4 cifre verso destra di tal numero. Sarà cotesto numero ridotto il quoto della frazione $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$. Siano dunque.

log. 5. = 0,69897
log. 4. = 0,60206

Somma . . 1,30103

Aumento di 3 la caratteristica 1 di questo logaritmo, il che moltiplica per 1000 il numero, e sarà il logaritmo somma = 4, 30103: di poi prendo

log. . . 3 = 0, 47712
log. . . 7 = 0, 84510

Somma. . . . 1, 32222

Si prenda la differenza di 4, 30103 da 1,3222 la quale è 2,97881. Cotal differenza è il log. del del quoziente $\frac{5\times4}{7\times3}\times1000$, il cui numero più prossimo nelle tavole è 952. Laonde separando 3 cifre, per dividerlo per 1000, essendosi moltiplicato per 1000, si avrà il valore 0,952, minore del vero per 0,001. Il che è chiaro (n.° 61. p. 2.a).

78 *Probl. Estrarre la radice quadrata, cubica, ec da una frazione per approssimazione.*

Sia la frazione $\frac{3}{8}$, di cui vogliasi la radice

quadrata differente dalla vera per meno 0,001

1.° Si scriva la frazione $\frac{3}{8}$ così $\frac{3,000000}{8}$.

2.° Si prenda il logaritmo di 3, e se ne aumenti la caratteristica del numero 6. Si prenda pure il logaritmo di 8.

3.° Si sottragga il log di 8 da quello di 3, 000000 aumentato del 6, si ritrovi il numero corrispondente nelle tavole, e poi si separino verso destra tante cifre decimali, il che è dividerlo per 1000. Sarà il fratto risultante la radice quadrata del fratto $\frac{3}{8}$. Ad eseguire l' operazione, si prenda il log. 3=0,47712, aumentata la caratteristica di 6, sarà 6, 47712, da cui tolto il log. di 8, che è 0,90309, si avrà 5,57403 per differenza.

Si prenda la sua metà che è 2, 78701 il numero che corrisponde nelle tavole è 609 diverso dal vero per meno di 0,001. Si separino tre cifre verso destra, lo che da 0,609, che sarà la radice richiesta.

Perchè si vuole la radice quadrata dalla frazione in millesimi, fa d' uopo che vi siano nel quadrato milionesimi, o sia 6 cifre decimali, onde si sono posti al numeratore 6 zeri, come quello che rappresenta quadrato. Ed essendosi aggiunte 6 unità alla caratteristica del logaritmo del 3,000000, il numero diviene un milione di volte maggiore, e perciò la sua radice ne è mille volte maggiore della vera, essendo 1000 radice di 1000000. Adunque per avere la vera radice è necessario dividere per

1000 la radice ritrovata, o sia separare verso destra tre cifre che danno appunto millesimi.

Nel cubo poi devono aggiungersi 9 zeri, per avere una cifra nella radice, come fu dimostrato (n.° 181. p. 1.a) e si deve prendere il terzo del logaritmo per avere il logaritmo della radice cubica. Onde rimane giustificata l'operazione.

Lo stesso metodo vale per la radice 4.a, 5.a, ec.

79 *Scolio* I. Tutte le operazioni additate per i fratti ordinarj possono applicarsi ai fratti decimali.

Per esempio vogliasi moltiplicare il numero 12 per lo fratto decimale 0, 459. Soppressa la virgola, il decimale rimane moltiplicato per 1000 (n.° 116. p. 1.a). Si cerchi il logaritmo di 459, che è 2,66181, e si aggiunga al logaritmo di 12, che è 1,07918. Sarà questa somma il logaritmo del prodotto di 12 per 459.

Il numero corrispondente è 5508, che è mille volte maggiore del vero, onde avrassi il vero separando verso destra tre cifre, e sarà il prodotto 5,508. Lo che si verifica moltiplicando 0,459 per 12.

80 *Scol.* II. Se tanto il moltiplicando, che il moltiplicatore avessero decimali, dopo essersi ritrovato il prodotto come se fosse di numeri interi, si separeranno tante cifre, quante sono quelle dell'uno, e dell'altro fattore (n.° 124. p. 1.a), e si avrà il vero prodotto.

81 *Scol.* III. Se si voglia dividere un decimale per un' altro, come 0,3484 per 0,6956. Si prenda il log. 3484 = 3,54208, il log 6956=3,84236; indi presa la differenza negativa — 0, 30028, ed

aumentata la caratteristica di 1, sarà il novello logaritmo 2, 69972 ed apparterrà ad un numero mille volte maggiore del quoto di 2485 per 6956, considerati como interi. Un tal numero si rinviene essere 501 presso ad una millesima minore del vero, onde dividendolo per 1000, sarà 0,501; e siccome il numero de' decimali è uguale nel divisore, e nel dividendo, così la virgola resterà nel sito, ove si trova.

82 *Scolio* Vogliasi la radice quadrata dal fratto decimale 0,273 differente dalla vera per 0,0001. Volendosi diecimilesimi nella radice, bisognerà che nel quadrato vi siano otto cifre decimali (n.° 172. p. 1.ª), cioè 8 zeri, il che non muta il valore (n.° 117. p. 1.ª). La frazione dunque diverrà 0,273,00000000. Supposta soppresa la virgola, si prenda di esso il logaritmo che è 7,436162, se ne prenda la metà 3,718081; a questi risponde il numero 5225, che è diecimila volte maggiore del vero, perciò si separano 4 cifre a destra, onde diviene 0,5225 per la radice cercata.

Vogliasi pure la radice cubica da 0,04 meno di 001. Scrivasi tal frazione così 0,040,000,000, cerchisi il logaritmo di 40000000, che è 7, 60206, il cui terzo è 2,53402. A questo risponde il numero 942, il quale è mille volte maggiore, onde, per avere il vero, separo tre cifre a dritta, e sarà 0, 142 per la radice cubica.

83 *Probl. Dato il logaritmo, che non si trova esattamente nelle tavole, trovare il numero cui risponda.*

Sia dato il logaritme 1, 89997 che non è e-

sattamente nelle tavole, trovare il numero che gli appartiene.

I. Si cerchi nelle tavole, e si vegga tra quali logaritmi si contiene. Esso vedesi contenere tra i logaritmi di 7942, 7943, perciocchè il logaritmo del 7942, chè è 3,8999300, è minore di 3,8999778; il log. di 7943, che è 3, 8999847 è maggiore di esso. E perchè il logaritmo dato è maggiore del logaritmo di 7942, e minore del logaritmo del numero 7943, bisogna che la differenza tra il numero 7942 dal richiesto sia in decimali, non potendo essere di 1, altrimenti sarebbe uguale a 7943, il cui logaritmo è già maggiore del dato. Quindi il numero che cercasi conterrà le stesse unità contenute in 7942, o sia la parte intera sarà 7942. Per avere la frazionaria parte, che gli appartiene, si prenda.

II. La differenza de' logaritmi di due numeri 7943, 7942, che è 0,0000547.

III. Si prenda anche la differenza del logaritmo proposto 3,8999777, e del logaritmo di 7942; che trovasi essere 0,0000478.

IV. Si faccia questa proporzione, come fu praticato (n.° 64. p. 2.ª) 0,0000547:0,0000478:: 1:x, ovvero $547 : 478 :: 1 : x = \frac{478}{547}$, frazione che bisogna aggiungere al numero 7942 per avere il numero, che ha per log. il proposto 3,8999778, la quale frazione ridotta a decimali è presso a poco 0,874. Onde il numero cercato è 7642, 874.

La dimostrazione è come quella del (n.° 64.p.2.ª)

84 *Scol.* Se si volesse approssimazione mag-

giore, si cercheranno altre cifre decimali, come qui sopra, facendo la seguente proporzione 547: 478:: 0,01 (eccesso di 79, 43 sopra 79, 42): x Ritrovasi x espresso da una sola cifra decimale significativa, che è 0,008; con due cifre significative, 0,0087; con tre 0,00874: ec. Così il valore del numero cercato con due cifre decimali è 79, 42, o più esattamente 79, 43, con tre cifre è 79, 528; con quattro 79,4287, con cinque 79, 42874, ec.

85 *Scol.* II. Avviene talora che si abbia un logaritmo, la cui caratteristica è maggiore di quella che trovasi nelle tavole, in tal caso si diminuisca di 1, di 2, di 3, ec. la detta caratteristica, fino a che si pervenga ad una che si comprende nelle tavole. Di poi con questo logaritmo si determini il numero al quale appartiene tal logaritmo, e determinato si porti la virgola verso sinistra di tanti posti quante sono le unità tolte alla caratteristica. Di che è chiara la ragione, imperocchè col sopprimere 1, 2, 3, ec. unità sulla caratteristica, il numero di quel logaritmo diviene 10,100,1000 volte minore (n.º 61, p. 2.ª), per ridurlo al vero, fa d'uopo moltiplicarlo per lo stesso divisore, il che si ottiene col rinculo delle cifre verso destra.

86 *Scolio* III. Se si abbia il logaritmo negativo come questo—1,2013200, si cercherà il numero a cui corrisponde tale logaritmo positivamente preso, il quale è 16. Sarà $\frac{1}{16}$ il numero del logaritmo negativo.

87 *Def.* Si dice *complemento aritmetico* di

un logaritmo l'eccesso del 10, del 100, del 1000, ec. sopra esso logaritmo.

Per esempio. Il numero 8 ha per logaritmo 0, 90309. Se questo logaritmo si tolga dal 10, ovvero dal 10,00000, il residuo, che si ottiene si chiama complemento aritmetico del logaritmo 0, 90309, cioè dal 10,00000 sottratto 0,90309, che è il log. 8, si avrà 9,09691, che è il complemento aritmetico.

88 *Teor. Se dal logaritmo di un qualunque numero debbasi sottrarre il logaritmo di un' altro numero, si otterrà la differenza, col prendere il complemento aritmetico del logaritmo, che si vuol sottrarre, unirlo al primo logaritmo, e di poi rigettare una decina dalla somma ottenuta. Sarà l' avanzo la differenza di que' logaritmi.*

Debbasi da 1,17609 logaritmo di 15, sottrarre 0, 47712 logaritmo di 3.

Prendasi il complemento aritmetico di 3, che è 9, 52288 differenza di 10,00000, e 0,47712 log. di 3.

Si aggiunga cotesto complemento al logaritmo di 15 che è 1,17609, si otterrà la somma espressa da 10,69897: si rigetti la caratteristica 10, il residuo sarà uguale alla differenza del logaritmo di 15, e di 3, come sopra.

La ragione dell'identicità di cotesti risultati è chiara; perciocchè in cotesta operazione non si fa altro, se non che accrescere di 10 la caratteristica del logaritmo negativo di 3, il che è moltiplicare il numero, cui appartiene per 10000 milioni di più, (n.° 43. p. 2.ª)

al quale logaritmo aggiunto il logaritmo di 15 dato, si avrà il logaritmo del numero 15, inoltre il logaritmo di un'altro 10000000 di volte maggiore del vero; ed essendo la somma loro il logaritmo del prodotto de' numeri che rappresentano, sarà cotesto prodotto 10000 milioni di volte maggiore. Laonde rigettando la caratteristica 10, rimarrà diviso per 10000 milioni (n.° 61.p.2.a), e sarà quindi il logaritmo del vero numero, ed è perciò che si ottiene in ambo le operazioni identico logaritmo C. B. D.

Per esempio vogliasi ritrovare il quarto proporzionale de' tre numeri 56 : 168:: 281 per mezzo del complemento aritmetico.

. Essendo $56 : 168 :: 281 : x = \frac{168 \times 281}{56}$ sarà

logaritmo $168 \times 281 = \log. 168 + \log. 281$ (n.° 44.p.2.a)

Cioè log. 168=2,22531

log. 281=2,44871

Complemento aritmetico del logaritmo 56=8,25181

Somma=12,92583

Si tolga da cotesta somma il numero 10, o sia si diminuisca la caratteristica 12 del 10, rimarrà 2,92533. Sarà questo il logaritmo del quarto ricercato, cui nelle tavole corrisponde il numero 843, che sarà il quarto proporzionale, onde la proporzione sarà 56: 168:: 281: 843.

89 *Probl. Fra 8, e 89 inserire quattro medj proporzionali geometrici.*

Dovendosi inserire tra 8, e 89 4 medj geometrici, la progressione sarà composta di sei termi-

ni di cui 8, ed 89 sono gli estremi. Ma ai termini di questi corrispondono i logaritmi, i quali formano una progressione aritmetica (n.° 38. p. 2.ª). Adunque bisogna ricercare i termini di tale aritmetica progressione, perocchè essendo questi logaritmi dei corrispondenti termini della geometrica, avuti questi, si avranno quelli. Ed essendo di tale aritmetica progressione dati gli estremi, che sono appunto i logaritmi de' termini estremi della geometrica 8, ed 89, si rinverrà con questi la differenza delli termini della progressione aritmetica (n.° 21. p. 2.ª), chiamandola d, sarà quella espressa da $d = \frac{\log. 89 - \log. 8}{5}$; e scrivansi cotesti logaritmi così.

$$\log.\ 89 = 1{,}94939$$
$$\log.\ 8 = 0{,}90309$$

Fatta la sottrazione sarà il residuo $= 1{,}04630$ dividendo tal residuo per 5, o sia $\frac{1{,}04630}{5}$, si avrà, fatta la divisione, il risultato 0,20926, che è il valore della d: ottenuta la differenza, si potranno ottenere tutti i termini intermedj ai logaritmi di 8, ed 89 (n.°21. p. 2.ª). Con questi termini della progressione aritmetica, che sono logaritmi della geometrica, si avranno i di lei termini. Il che si esegue nel seguente modo. Cioè al logaritmo di 8 si aggiunga la differenza d, e si avrà il secondo termine della progressione aritmetica; al secondo si aggiunga la stessa differenza, e così di seguito, e si avranno i sei termini, che sono logaritmi ai quali cor-

risponderanno nelle tavole numeri, che saranno i termini della serie geometrica. C. B. F.

89 *Probl. Un uomo da ad interesse una certa somma ad un altro al 5 per 100 per ogni anno. L' interesse di ciascun anno si fa rimanere in mano del debitore, per unirlo al capitale: Si dimanda il tempo, che bisogna, onde il capitale dato diventi il doppio di quello che era.*

Suppongasi la somma mutuata espressa da 1; e dovendo questa rendere il cinque per cento, facendo 100: 5:: 1: x, sarà $x = \frac{5 \times 1}{100} = \frac{1}{20}$, che è l'interesse della somma 1 alla fine di un anno. Adunque dovendosi la somma totale coll' interesse restituire alla fine del primo anno, ella sarebbe $1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20}$, la quale può essere espressa dal fratto di fratto $\frac{21}{20} \times \frac{20}{20}$, che riducesi di nuovo a $\frac{21}{20}$(n.° 49. 6.° p. 1.a) Vale a dire alla fine del primo anno la somma dovuta è uguale alle $\frac{21}{20}$ della somma mutuata.

Per avere l'espressione dell' interesse, che spetta al creditore alla fine del secondo anno, si faccia la proporzione 100: 5:: $\frac{21}{20}$: x, ovvero (n.° 194. p. 1.a) 20 : 1:: $\frac{21}{20}$: $x = \frac{21}{20} \times \frac{1}{20}$, che sarà l' interesse del secondo anno. Aggiunto questo alla somma dovuta alla fine del primo anno, che è $\frac{21}{20}$, si avrà la som-

ma del capitale, ed interessi dovuta alla fine del secondo anno, che sarà $\frac{21}{20}+\frac{21}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{21}{20}(1+\frac{1}{20})$, vale a dire la somma dovuta dopo il secondo anno sarà $\frac{21}{20}$ di quella dovuta alla fine del primo anno, o sia la somma dovuta dopo il primo anno moltiplicata per $\frac{21}{20}$. Così pure la somma dopo il terzo anno sarà $\frac{21}{20}$ di quella dovuta dopo il secondo anno, cioè, facendo la solita proporzione.

$20 : 1 :: \frac{21}{20}(1+\frac{1}{20}) : x = \frac{21}{20}\times\frac{1}{20}(1+\frac{1}{20})$, che sarà l' interesse dopo il terzo anno, a cui aggiunto il capitale dovuto dopo il secondo, sarà $\frac{21}{20}(1+\frac{1}{20}) + \frac{21}{20}\times\frac{1}{20}(1+\frac{1}{20}) = (\frac{21}{20}+\frac{21}{20}\times\frac{1}{20})(1+\frac{1}{20}) = \frac{21}{20}(1+\frac{1}{20})(1+\frac{1}{20})$, che dinota pure le $\frac{21}{20}$ del quadrato di $(1+\frac{1}{20})$, somma dovuta dopo il secondo anno; e così si dimostra, che la somma dovuta dopo il quarto anno sia espressa da $\frac{21}{20}(1+\frac{1}{20})(1+\frac{1}{20})(1+\frac{1}{20})$, cioè dalle $\frac{21}{20}$ del cubo di quella dovuta dopo il secondo. E così di seguito. Laonde le differenti somme costituiscono una progressione geo-

metrica crescente, il cui primo termine è $\frac{20}{20}$, il secondo è uguale al primo moltiplicato per $\frac{21}{20}$, il terzo uguale al secondo moltiplicato per $\frac{21}{20}$, il quarto uguale al terzo moltiplicato per $\frac{21}{20}$, ec, e l' ultimo deve essere doppio del primo sarà $\frac{40}{40}$. Ora ai termini di questa geometrica progressione corrispondono de' logaritmi, che costituiscono una progressione aritmetica, di cui il primo termine è il logaritmo di $\frac{20}{20}$, ovvero di 1, che è 0,00000; l'ultimo termine è il logaritmo di $\frac{40}{20}$, o sia di 2, che è 0, 30103; ed essendovi in ciascun termine della serie geometrica il fattore $\frac{21}{20}$, il logaritmo suo sarà la differenza additiva nella progressione aritmetica, il quale è 0,02118. Adunque la quistione si riduce a trovare il numero de' termini, o della progressione geometrica, o aritmetica, essendo dati gli estremi, e la differenza nell' aritmetica, e la quantità di ragione nella geometrica. Ma essendo nella progressione aritmetica il numero de' termini uguale all' ultimo termine, meno il primo, e 'l residuo diviso per la differenza de' termini della serie (n.° 31. p. 2.ª) coll' aggiunta di 1, chiamando n il

numero de' termini, sarà $n = \frac{0{,}3010300 - 0{,}000000}{0{,}0211893} +$
$1 = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} + 1 = 14{,}206$ presso a poco con 1 di più, cioè 15, 206, numero totale de' termini della progressione, o sia numero degli anni. Ma come la prima somma $1{,}0 \frac{20}{20}$ corrisponde al principio del primo anno; e la seconda allo spirar del primo anno, la terza somma allo spirar del secondo, e così di seguito; è chiaro che al termine di 14 anni, e 0, 206 di un' anno, cioè di 14 anni, 2 mesi, 14 giorni, e $\frac{4}{25}$ del giorno, presso a poco, la somma, che fu la prima volta mutuata, rimane duplicata.

90 *Probl. Un negoziante da ad una persona una somma ad interesse a ragione del 5 per 100 l'anno: alla fine di ciascun anno concede novella somma allo stesso debitore; e ciò fa per anni 4. Si domanda quale sarà la somma accumulata coll' interesse composto alla fine dell' ultimo anno?*

Siano 96, 74, 83, 68 le somme impiegate in ciascun anno. La somma 96 stando nelle mani del debitore per gli anni 4, diverrà (n.° 89, e 12. *Scol.*) $96\left(1+\frac{1}{20}\right)^4$, la somma 74 per gli anni 3 diverrà $74\left(1+\frac{1}{20}\right)^3$, la somma 83 per gli anni due di-

verrà 83 $(1+\frac{1}{20})^2$, la somma 68 per l' ultimo anno diverrà 68 $(1+\frac{1}{20})$; e chiamando S la somma di tutti questi capitali ad interesse composto, sarà.

A. . . . $S=96\,(1+\frac{1}{20})^4+74\,(1+\frac{1}{20})^3+83\,(1+\frac{1}{20})^2+68\,(1+\frac{1}{20})$. Posti uguali i capitali diversi, sarà.

B. . . . $S=96\,(1+\frac{1}{20})^4+96\,(1+\frac{1}{20})^3+96\,(1+\frac{1}{20})^2+96\,(1+\frac{1}{20})$. Questa è una progressione geometrica, essendo i termini continuamente proporzionali. E prendendo $96\,(1+\frac{1}{20})^4$ per l'ultimo termine, $96\,(1+\frac{1}{20})$ pel primo, sarà la somma di tutta la serie (n.° 12. 2.ª p. Scol.)

$S=96\,(1+\frac{1}{20})\,[\,(1+\frac{1}{20})^4-1\,]:\frac{1}{20}$, ovvero facendo la divisione.

D. . . $S=20\times96\,(1+\frac{1}{20})\,[\,(1+\frac{1}{20})^4-1\,]$.

91 *Scol.* Cotesto risultato produce quattro quistioni lative a quattro cose involte in esso. Tali sono. 1.° Il capitale 96. 2.° L'interesse del tanto per 100, come è $\frac{1}{20}$. 3.° Il numero degli anni dinotato dal 4. 4.° La somma composta S le qua li quistioni rimarranno risolute nel modo seguente.

1.° Se si conoseano tre cose, come per esempio il capitale, che è 96, il tanto per 100, il numero degli anni, si conoscerà la somma S, che si rileva in D, sostituendo i valori dell' interesse, capitale, e numero degli anni.

2.° Se si conosca S, cioè se il patto sia di ritornare nelle mani del creditore una determinata somma alla fine di ciascun anno, si sappia pure il numero degli anni, e l'interesse, si conoscerà il capitale, che si suppone ignoto.

3.° Se si conosca S, il numero degli anni, e 'l capitale dinotato da 96, si conoscerà il tanto per 100.

4.° Se sia noto il capitale, la somma composta S, il tanto per 100, si conoscerà n. Per rilevare n, che nel caso di D è 4, bisogna tener ricorso ai logaritmi, il che si esegue così.

Si riprenda l'espressione $S=96\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(\left(1+\frac{1}{20}\right)^{n}-1\right):\frac{1}{20}$, o sia $S=20\times96\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)^{n}-20\times96\left(1+\frac{1}{20}\right)$, o pure $S=96\times21\times\left(\frac{21}{20}\right)^{n}-96\times21$; ed aggiungendo ad ambo le parti 96×21, sarà $S+96\times21=96\times21\times\left(\frac{21}{20}\right)^{n}$, onde $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}=\frac{S+96\times21}{96\times21}=\frac{S+2016}{2016}$, e (n.° 46. p. 2.ª) $n\log.\left(\frac{21}{20}\right)=\log.\left(\frac{S+2016}{2016}\right)=\log.(S+2016)-$

log. 2016, ed $n = \frac{\log.(S+2016)-\log.2016}{\log.\frac{21}{20}}$.

Il problema seguente è l' inverso del precedente, che è detto delle *annualità*.

92. *Probl. Determinare la somma che un debitore debba pagare in ogni anno, a fin di estinguere in 4 anni un debito di 848 ducati cogl' interessi al 5 per 100 per tutto questo tempo.*

Dovendosi il primo pagamento fare alla fine del primo anno, un tal tempo sarà espresso da 3, che è l' intervallo tra la fine del primo anno, e l' ultimo, in cui spira il termine de' pagamenti.

Se si chiami a il primo pagamento, che ha luogo per 3 anni, la sua espressione sarà $a(1+\frac{1}{20})^3$ (n.° 89), il secondo pagamento varrà $a(1+\frac{1}{20})^2$, il terzo $a(1+\frac{1}{20})$, e così dell' ultimo, che varrà a. Ora la somma 848 data ad imprestito, in mano del debitore per lo spazio di 4 anni varrà $848(1+\frac{1}{20})^4$, che dovrà essere uguale a tutti gli avvanzi riuniti, i quali il creditore ha ricevuti dal debitore, si avrà dunque $848(1+\frac{1}{20}) = a(1+\frac{1}{20})^3 + a(1+\frac{1}{20})^2 + a(1+\frac{1}{20}) + a$, e calcolando cotesta progressione, si avrà (n.° 91. 4:°).

$848(1+\frac{1}{20})^4 = a\left(\frac{(1+\frac{1}{20})^4-1}{\frac{1}{20}}\right) = 20\,a\,((1+$

$\frac{1}{20})^4-1)$ ed in generale. $A(1+r)^n=a\frac{(1+r)^n-1)}{r}$..M. In questa ultima espressione A esprime la somma composta, r l' intêresse, come $\frac{1}{20}$, a il primo pagamento, n il numero degli anni, praticando le stesse operazioni del probl. prec., si ricaveranno le rispettive ignote.

Sia per esemp. A=100, n=12, $r=\frac{1}{20}$. Si domanda l' annuità a. In tal caso l' equazione M . . . $A(1+r)^n=a\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$ si riduce ad $a=rA\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$....N, il che si ottiene moltiplicando prima per r a destra, e sinistra, e poi dividendo per $(1+r)^n-1$. Per rendere pratica la formola N si sostituiscano i valori di a, n, r, A. Ciò posto, sarà $(1+r)^n=(\frac{21}{20})^{12}=1,79586$ il che si ottiene pei logaritmi. Sostituito tal valore in N. si avrà

$$a=\frac{100\times\frac{1}{20}\times1,79586}{1,79586-1}=\frac{5\times1,79586}{0,79586}=11,28\ 26$$

d. c. g.

Dunque bisognano 11, 2, 8 annui per estinguere in 12 anni il capitale di duc. 100 al 5 per 100 l'anno.

CAPITOLO IV.

TEORIA DELLE COMBINAZIONI, E PERMUTAZIONI.

93 Def. I. *Permutazione* è il cambiamento dell'ordine delle cose, ovvero la mutazione della loro coesistenza. Così se due cose A, B coesistano in modo che A stia prima, B dopo, come AB, e da questa coesistenza, o ordine passino a quest'altra BA, cotesto cambiamento di ordine si chiama permutazione. Così pure se son tre ABC, e passino ad ACB, BCA, CAB, BAC, CBA, che tutte sono sei, si diranno permutate.

94 Def. II. *Combinazione* è quel numero che indica quante volte possano insieme ordinarsi le cose, a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec.

95. *Probl. Date più cose, ritrovare il numero delle loro permutazioni, in modo però che siano sempre prese insieme, variato solamente l'ordine con cui coesistono.*

Siano dati i diversi gruppi di cose A, AB, ABC, ABCD, ABCDE, ec. ritrovare il numero delle loro permutazioni.

Si distribuiscano cotesti gruppi in modo che ciascuna lettera occupi successivamente il luogo dell'altra, e quella il suo, e sarà il numero delle permutazioni di A, 1, quello di AB 2, quello di ABC $6=2.3$, quello di ABCD $24=2.3.4$, quello di ABCDE di $120=5\times24=1.2.3.4.5$.

Imperocchè nel primo caso quando è una sola

cosa, è manifesto, che una sola permutazione può avere, onde sarà dinotata da 1.

II Siano due cose dinotate da AB, potendo la prima lettera passare al luogo della seconda, e quella al luogo della prima, si avranno due permutazioni, cioè AB, BA, onde il loro numero sarà dinotato da 1. 2. (il punto vale ×)

III. Siano tre cose ABC, potendo le due prime ricevere due permutazioni AB, BA, se a ciascuna di queste due si aggiunga C a sinistra, e poi passi successivamente a destra delle lettere di quelle due permutazioni, si avranno le permutazioni, cioè CAB, ACB, ABC, CBA, BCA, BAC, che sono 6, cioè 1. 2. 3.

IV. Siano quattro cose ABCD, potendo le tre prime ricevere 6 permutazioni, e potendo la D occupare in ciascuna delle sei 4 posti, uno a sinistra e tre alla destra di ciascuna lettera, si avranno le permutazioni DCAB, CDAB, CADB, CABD, DACB, ADCB, ACDB, ACBD. ec. sino à 24=1. 2. 3. 4.

V. Così anche se siano cinque cose, come ABCDE, esse potranno ricevere le permutazioni 1. 2. 3. 4. 5. ed in generale se sia un maggior numero di cose ABCDEFG. ec. il numero delle permutazioni sarà 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.... ec. C. B. F.

95 *Coroll.* Siegue da ciò, che per avere il numero delle permutazioni di più cose date, fà d'uopo scrivere una serie aritmetica naturale, il cui primo termine sia 1, e l'ultimo il numero delle cose a permutarsi, e di poi moltiplicare tutti i termini successivamente tra loro, il prodotto indicherà il numero delle permutaziani.

96 *Teor. Se vi siano più cose a combinarsi, e la loro combinazione sia una ad una.*

1.° *Saranno queste tante, quante le cose.*

2.° *Se la combinazione sia due a due, esse saranno uguali al quadrato del numero delle cose.*

3.° *Se la combinazione sia tre a tre, saranno uguali al cubo del numero delle cose, e così se quattro a quattro, se cinque a cinque, al quadrato-quadrato, alla potenza quinta del numero di esse cose.*

I. Sia 4 il numero delle cose, che si dinotino con A, B, C, D, è chiaro che comunque si combinino una ad una, sempre quattro saranno le espressioni del linguaggio nel profferirle.

II. Sia binaria la loro combinazione, cioè due a due. Ogni lettera potrà tenere a destra, o a sinistra ciascuna delle quattro, si formeranno perciò quattre volte quattro diverse combinazioni o sia 4×4. quadrato di 4.

Ciò si fa più chiaro, scrivendo in quattro linee orizzontali le quattro lettere date, e poi a sinistra di ciascuna scriverle una ad una così.

AA AB AC AD
BA BB BC BD
CA CB CC CD
DA DB DC DD

ove vuole avvertirsi di non iscrivere pure a destra, perocchè si replicherebbero le stesse combinazioni, come ognuno può osservarlo.

III. Sia trinaria la combinazione, cioè tre a tre, in tal caso il numero sarà quadruplo delle bi-

narie, cioè 64, o sia $4\times4\times4$. Imperocchè combinando come nel caso precedente ad ogni binario ciascuna lettera, è manifesto che essendo 4×4 i binarj, la combinazione triuaria debba essere 4 volte delle 4 delle quattro, ovvero $4\times4\times4$, che è il cubo di 4.

IV Sia quaternaria la combinazione, o sia quattro a quattro, è manifesto che a canto a ciascun ternario dovendosi porre ciascuna lettera, saranno in tal caso replicati ciascuno 4 volte, onde le combinazioni saranno 4×64, o sia $4\times4\times4\times4$, cioè uguale al quadrato-quadrato.

La stessa legge si osserva se in vece di 4 cose fossero cinque, 6, 7 o più a combinarsi nel modo indicato. Onde generalmente è vero ciò che si è proposto. C. B. D.

97 *Corol.* I. Che se si volessero escludere le combinazioni di una lettera con se stessa ne' binarj, come le AA, BB, CC, DD, in tal caso la combinazione deve effettuirsi tra ognuna delle quattro lettere con ciascuna delle 3 rimanenti, onde il numero delle combinazioni sarà $4\times3=12$.

II. Se si volessero escludere le simili combinazioni ne' ternarj, in tal caso dovendo la combinazione eseguirsi con i binarj, e ciascuna delle due lettere rimanenti, sarà tal combinazione espressa da $4\times3\times2=24$.

III. Se si volessero escludere le simili ne' quaternarj, dovrassi eseguire la combinazione de' ternarj colla rimanente delle quattro lettere, onde sarà $4\times3\times2\times1=24$.

98 *Corol.* IV. Nelle combinazioni di simil fatta sonovi le medesime lettere ordinate diversamente, come le A,B,C, nè binarj si trovano AB, BA, AC, CA, BC, CB, cioè 3×2 combinazioni. Ora se in queste combinazioni delle medesime lettere si vogliano escludere quelle dove si osservano le stesse lettere, poste però in diverso ordine, come sono AB, BA, ec. e si volessero escludere le BA, CA, CB, per essere ripetizioni delle stesse lettere AB, AC, BC, in tal caso, essendo doppio il numero delle combinazioni binarie, quando le lettere ripetonsi in diverso ordine, bisognerà dividere per 2 il prodotto, per avere le combinazioni di un sol ordine, e quello delle trinarie essendo due volte il triplo il numero delle combinazioni, farà d'uopo dividere per 2×3; per le combinazioni quaternarie fa d'uopo dividere per $2\times3\times4$. Laonde, date 6 cose, le combinazioni binarie di un solo ordine saranno $\frac{6\times5}{1.\ 2.}$, le ternarie saranno $\frac{6\times5\times4}{1.\ 2.\ 3.}$, le quaternarie saranno $\frac{6\times5\times4\times3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$.

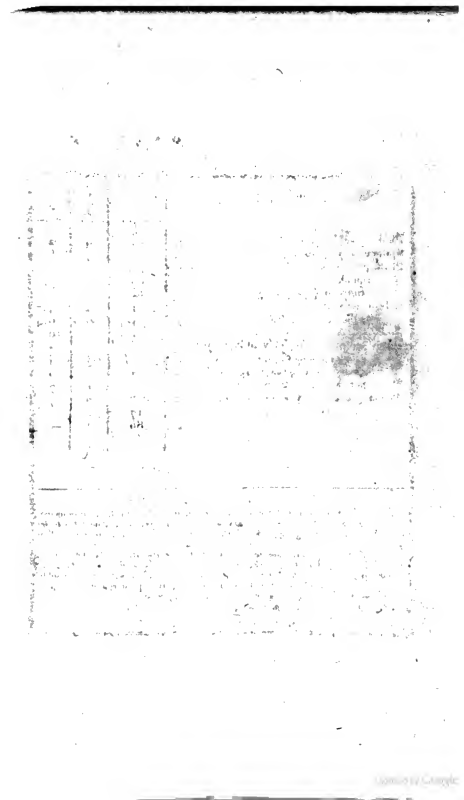
99 *Cor.* IV. Da tale legge di combinazioni si rileva, che nella combinazione di 90 numeri, vi saranno per gli ambi 4005, pe' terni 117480, pei quaterni 2,555,190 pe' quinterni, 43,949,268. Per i 5 numeri estraendi poi le combinazioni degli ambi saranno 10, de' terni 10, de' quaterni 5, dei quinterni 1.

100 *Scol.* I. Che se le lettere siano 5, la combinazione binaria, escluse le combinazioni delle me-

desime lettere, sarà 5×4; la ternaria sarà $5\times4\times3$; la quaternaria $5\times4\times3\times2$, la quinquenaria $5\times4\times3\times2\times1$. E così se siano 6, 7, 8. ec. lettere si verificherà sempre questa legge per siffatte combinazioni, di cui eccone la regola.

» Si scriva una serie aritmetica naturale de-
» crescente, cominciando dal numero delle cose,
» che si vogliono combinare, e terminando all'u-
» nità, come nella serie seguente, in cui si danno
» 10 cose, come 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.
» Il prodotto de' termini di tal serie esprimerà il
» numero delle combinazioni. Cioè il prodotto dei
» primi due indicherà le combinazioni binarie, dei
» primi tre le ternarie, de' primi quattro le quater-
» narie, e così di seguito ».

Per rendere questo lavoro vieppiù utile alle scienze, che hanno con questa un rapporto, vi ho aggiunte delle tavole de' pesi e misure sì antiche, che moderne, il che rende un servizio agli eruditi nella lettura de' libri, ed un comodo ai commercianti.

FINE.

MISURE

ANTICHE		piedi parigini	poll. c.	linee.
Piede piccolo greco	,,	—	6	2
Spitama (*palmus*)	,,	—	7	8
Piede geometrico	,,	—	10	3
romano	,,	—	10	10,6
olimpico (*pygma*)	,,	—	11	6
Cubito comune	,,	1	3	4,7
sacro (*nilometro*)	,,	1	8	6,4
ebraico	,,	1	7	10
Passo semplice (o del viandante)	,,	2	1	8
geometrico o doppio	,,	4	3	4
romano (o braccio romano)	,,	4	6	5
persiano (o braccio greco)	,,	5	1	7
Acena (canna o pertica comune)	,,	8	6	7
doppia	,,	17	1	2
Jugero	,,	85	6	—

(a) Di qui nasce il decametro, ectometro, ec. e il decimetro, centimetro ec. Per tutte le misure moderne V. Tavole di riduzione ec. (edizione officiale. Firenze 1809): e Lacroix Aritmetica (Firenze 1811). Il metro è braccia fiorentine 1. 14. 3, 2.

(b) Il braccio *a terra* sta al braccio *a panno* : : 17 : 18 ; onde braccia 6 *a terra* = 5 2/3 br. *a panno*, perchè 17/3 . 18/17 = 6, e perchè è il primo < del secondo di 1/18, cioè il primo è soldi 18 . 10 2/3, mentre il secondo è 20 soldi. Dal che nasce che anche l' antico miglio fiorentino (1000 passi romani di 5 piedi l' uno) di 3000 br. *a terra*, è ora 2833 1/3 br. *a panno*.

(c) Quindi 30 poll. ingl. = 28 poll. fr. = 0, 76 metri.

LINEARI

MODERNE		piedi parigini.	pollici.	linee.
Metro (a)	,,	3	—	11,296
Passo geometrico parigino	,,	5	—	—
Pertica o canna fiorentina di braccia 5 2/3		—	—	—
a panno o comuni	,,	10	2	2
di braccia 6 *a terra* fuor d' uso	,,	9	6	3,5
agrimensoria usuale di 5 braccia	,,	8	11	8
parigina { grande	,,	22	—	—
parigina { piccola	,,	18	—	—
Tesa parigina	,,	6	—	—
Auna parigina	,,	3	7	10,8
inglese (yard)	,,	3	7	8
Braccio di Firenze usuale o *a panno* (= 0,58 *metri*)	,,	1	9	6,7
a terra fuor d' uso (b)	,,	1	8	4,4
Palmo romano usuale	,,	—	8	3
di Napoli	,,	—	9	8,2
Piede francese o parigino	,,	1	—	—
inglese (c)	,,	—	11	3,12
del Reno e di Leida	,,	—	11	7,2
di Norimberga	,,	—	11	2,6
Vienna	,,	—	11	3,12
Lucca (*braccio*)	,,	1	9	9,5
Milano (*braccio*)	,,	1	9	9,3
Modena	,,	1	11	5,2
Novara (il moderno)	,,	1	10	2,3
Pavia	,,	1	5	4
Padova	,,	1	3	9,9
Turino	,,	1	6	11,7
Venezia	,,	1	—	10

MISURE

ANTICHE		Tese parigine.		
Stadio piccolo di 600 pie. piccoli	,,	51	1	2
olimpico di 600 pie. olimp.	,,	95	0	8
Viaggio sabbatico (2000 cub. com. ebr 1000 passi semplici)	,,	356	3	9
Miglio ebraico (4000 pie. geometr.)	,,	570	4	—
antico europeo (5000 pie. geom.)	,,	713	2	—
romano (1000 passi o 5000 pie. rom.)	,,	756	—	—
asiatico (6000 pie. geom.)	,,	856	—	—
Coss indiano (9000 pie. geom.)	,,	1284	—	—
Parasanga (24000 spitame, o 18000 pie. geom.)	,,	2568	—	—

Un grado del gran

Leghe fr. marine	,,	20
comuni	,,	25
Miglia romane	,,	75
geografiche	,,	60
fiorentine	,,	67 1/2
inglesi	,,	68

ITINERARIE.

MODERNE.		Tese parigine.		
Lega fr. marina (20000 pie. geom.)	,,	2853	2	—
comune (3200 passi geom.)	,,	2283	—	—
detta per gli Astronomi	,,	2280	—	—
piccola	,,	2000	—	—
Giornata fr. di cammino	,,	22830	—	—
Werst di Russia	,,	547	—	—
Miglio d' Italia o geografico	,,	951	3	11
di Toscana o fiorentino (1,65 chiliometri)	,,	848	2	6
moderno di Roma	,,	764	—	—
d' Inghilterra	,,	827	3	2
d' Austria	,,	3892	2	6
di Svezia	,,	5438	—	3

Cerchio terrestre è

Werst di Russia	,,	80
Stadj olimpici	,,	360
Piedi geometrici	,,	400000
Alla latitudine media secondo Piccard	Tese.	57060

	Tese quad.
Jugero quadro q. (2 *atti* q. o pertiche romane q. 288 di 100 pie. rom. q. l'una) = 26120 pie. fr. q. ,,	725,5
Acre di Normandia (160 pertiche q. di 22 pie. l'una) = 77440 pie. q. ,,	2151,1
„ di Parigi (*arpent*) 100 pertiche q. (di 22 pie.) = 48480 pie. q. ,,	1344,4
Moggio di Napoli = 900 passi quadrati, ciascuno di 7 palmi di lunghezza ,,	729,96
Versura Pugliese = 3600 passi quadrati ,,	2919,85

Antiche fiorentine abolite nel 1782

Stajoro = stiora 3 =	br. q. *a terra* 5184 =	br. *a panno* 4624 (d)
Stioro = panora 12 =	1728 =	1541, 3
Panoro = pugnora 12 =	144 =	128, 4
Pugnoro =	12 =	10, 67
Braccio quadro	1	

(d) Infatti perchè 17 br. *a panno* ne fanno 18 *a terra*, per il rapporto delle lor superficie q. la Geometria ci dà $17^2 : 18^2$; o 289 : 324, ossia 324 br. q. *a terra* corrispondono a 289 br. q. *a panno*.

SUPERFICIALI

Comuni fiorentine fissate nel 1782

Quadrato (Q) =	10 Tavole = (are 34,06) Braccia *a panno*	10000
Tavola (T) =	10 Pertiche o Canne =	1000
Pertica (P) =	10 Deche =	100
Deca (D) =		10
Braccio q. (B) =		1

Quindi è che 1.° avendo per esempio 8945632 b. q., col punteggiare le prime quattro cifre si ha 894 Q, 5 T, 6 P, 3 D, e 2 B q.; 2.° avendo 59 Q, 7 T, 4 P, 8 D, e 6 B q., si scriverebbe 597486. 3.°

Stiori		Q	T	P	D	B q.
1	=	—	1.	5.	4.	1 1/3
10	=	1.	5.	4.	1.	3 1/3
100	=	15.	4.	1.	3.	3 1/3
1000	=	154.	1.	3.	3.	3 1/3
10000	=	1541.	3.	3.	3.	3 1/3

	Peso francese			Valore in mon. fr		
	onc.	gros.	grani	lire	soldi	denari
Terunzio ,,	—	—	1, 5	—	—	4, 2
Lupino ,,	—	—	7	—	1	6, 7
Obolo (1/2 scrupolo) ,,	—	—	10, 5	—	2	4
Sesterzio (3/4 di scrupolo, *nummus*, *sestertius*) (*e*) ,,	—	—	15, 7	—	3	6
Diobolo (2 oboli) scrupolo rom.	—	—	21	—	4	8
Triobolo (3 oboli) 1/2 dramma o 1/2 grosso ,,	—	—	31, 5	—	7	—
Tetrobolo (4 oboli) ,,	—	—	42	—	9	4
Dramma attica piccola (6 oboli) o danaro rom. (*f*) ,,	—	—	63	—	14	—
Tetradramma(*statera d'argento*) o 3 dramme attiche grandi ,,	—	3	36	2	16	—
Siclo samaritano o ebraico ,,	—	3	50	2	19	1, 3
Dramma attica media ,,	—	1	9	—	18	—
. . . . . grande (4 scrupoli) ,,	—	1	12	—	18	8
Oncia romana (24 scrupoli) 6 grandi dramme att., o 8 piccole (*g*) ,,	—	7	—	5	12	—
Sextans (1/6 d'asse o 2 once) ,,	1	6	—	11	4	—
Statera d' oro (col rapporto di 1 : 10) *aureus*, *chrysos* ,,	2	1	36	14	—	—
Quadrans (3 once) ,,	2	5	—	16	16	—
Triens ,,	3	4	—	27	8	—
Semissis (1/2 asse) ,,	5	2	—	33	12	—

(*e*) Il gr. sesterzio (*sestertium*) è ideale = 1000 sest. picc.
(*f*) Il danaro rom. ora 4 sesterzj o 40 terunzj.
(*g*) L'oncia romana antica sta alla parig. : : 7 : 8.

PESI ANTICHI

	Peso franc.				Valore in mon. fr.		
	libbre	once	gros.	grani	lire	soldi	denari
Asse o libbra rom. (72 gran dramme o 96 picc.) (h) ,,	—	10	4	—	67	4	—
Dupondius (2 assi) ,,	1	5	—	—	134	8	—
Mina rom. (*mna*) 60 di esse fanno libb. 100 rom.) ,,	1	1	4	—	112	—	—
. . attica piccola (75 gr. dram., o 100 picc.) (i) ,,	—	10	7	36	70	—	—
. . . grande (100 gr. dram., o 133 1/2 picc.) ,,	—	14	4	48	93	6	8
. . . talmudica ,,	—	7	2	24	46	13	4
Congio (libb. 10 rom., o 960 dram. pic.) (2 congj = 1/2 urna)	6	9	—	—	672	—	—
Urna (1/2 *quadrantal*) ,,	26	4	—	—	2688	—	—
Quadrantal, amphora, metreta libb. 80 rom.) ,,	52	8	—	—	5376	—	—
Metreta greca (libb. 90 rom.) ,,	59	1	—	—	6048	—	—
Talento attico picc. o comune (4500 dram. gr., o 6000 pic.)	41	—	2	—	4200	—	—
. . . . . . grande (6000 gr. dram., o 8000 pic.) ,,	54	11	—	—	5600	—	—
. . . . italico (*centumpondium* ,,	65	10	—	—	6528	—	—
. . . . . . alessandrino o ebraico (2 talenti picc.) ,,	82	—	—	—	8400	—	—
. . . . di rame ,,	—	11	8	—	75	—	—

(h) Si consideri nella prima istituzione e non dopo le varie riduzioni.

(i) 10 picc. mine attiche = 1000 dram. piccole.

	Libbra parig.			Libbra fior.		
	onc.	gross.	gr.	onc.	dan.	gr.
Berlino (*libbra di 2 marchi*) ,,	15	2	32	16	13	5, 1
Costantinopoli (*Ckeki*) ,,	10	3	28	11	6	12, 5
Dresda e Danzica (*lib. di 2 marc.*) ,,	15	1	7	16	12	2, 1
Firenze (*lib. di 12 once*) (k) ,,	11	1/2	20	12	—	—
Leida ,,	14	7	11	16	7	1
Londra (*libbra troy*) ,,	12	1 1/2	1	13	4	8, 1
(*avoir du poids*) (l) ,,	14	6 1/2	6	16	—	16, 5
Lucca per il commercio ,,	10	6	22, 5	11	16	12
Monaco di Baviera (*lib. di 2 marc.*) ,,	15	2	23	16	12	19, 5
Modena ,,	11	—	67, 1	12	—	12
Napoli (*libbra*) ,,	10	3 1/2	27	11	8	2, 2
(*rotolo*) ,,	29	1/2	35	31	11	19, 7
Norimberga ,,	16	5	18	18	—	6, 5
Parigi (*lib. di 2 marc.*) ,,	16	—	—	17	7	5, 7
Reno (*libbra del*) di 7680 gr. Ren. ,,	12	—	32	13	1	—
Roma (*libbra*) ,,	11	1/2	14	11	23	17, 5
Turino (*libbra comune*) di 12 once ,,	10	—	27, 5	13	—	22, 7
Vienna (*lib. di 2 marc.*) nel commercio ,,	18	2	32	19	19	2
nella zecca ,,	18	2	52	19	19	23, 5

(m)

(*k*) Divisione della libbra parig.

grani					
24	danaro	grosso o dramma			
72	3				
576	24	8	oncia		
4608	192	64	8	marco	
9216	384	128	16	2	libbra

Questa lib. è 1/2 chilogrammo.

Divisione della libbra fiorentina

grani				
24	danaro	dramma o grosso		
72	3			
576	24	8	oncia	
6912	288	96	12	1 libbra

Questa libbra = 340 grammi

(*l*) Libbre 2000 ingl. fanno il *tun*.

(*m*) Il cantaro comune è lib. 150 = 51 chilogrammi, e il quintale è libb. 100 = 33,9 chilogr.

MISURE

PER I

MISURE ANTICHE		pol. cub. fr.	pinte fr.
Piede cubico geometrico	,,	1092	22, 7
rom. o metreta (*amphora*)	,,	1296	27
pigma	,,	1555	32, 2
greco o metreta (*cadus*, *diota*) (*n*)	,,	1458	30, 4
Cyatus de' Greci	,,	1, 7	0, 35
de' Latini	,,	2, 25	0, 46
Concha	,,	0, 8	0, 18
Urna	,,	648	13, 5
Congio	,,	162	3, 4

(*n*) Il cado conteneva lib. 90, e l'anfora lib. 80 rom. d'umido; o sia il pie. cub. grec. sta al pie. cub. rom. : : 9 : 8; l'idria era 3 anfore.

DI CAPACITA'

LIQUIDI

MISURE MODERNE		pie. cub. fr.	pinte fr.
Tonnellata com. fr. (3 botti) (l' ingl. è un pò più forte)	,,	24	864
Botte	,,	8	288
Foglietta (1/2 botte)	,,	4	144
		pol. cub. fr.	
Barile fr.	,,	1728	36
fiorentino da vino (20 fiaschi)	,,	3297	68 3/4
da olio (16 fiaschi)	,,	2637	55
Brocca fr.	,,	576	12
Gallon fr. (l' ingl. è più forte)	,,	192	4
Boccale fr.	,,	96	2
Pinta (l' ingl. è doppia della fr.)	,,	48	1
Fiasco (4 mezzette) da vino		164	3 1/2
da olio	,,	132	
Mezzetta (quartucci)	,,	41	1 3/4
da olio	,,	33	

MISURE

PER GLI

MISURE ANTICHE		peso fr.	staja fr. e quartucci
Medinno attico (6 moggia)	,,	lib. 70. 14	3. 9
Moggio grec. (congj 2. 2/3)	,,	11. 13	— 9 1/2
(o) romano	,,	15. 12	— 12 2/
Congio grec. (3 chenici)	,,	4. 7	— 3
rom. (1/2 d' anfora)	,,	5. 14	— 4 3/
Chenice	,,	1. 8	— 1
Anfora (3 moggia rom.)	,,	47. 14	2. 6

(o) Il moggio grec. sta al rom. : : 3 : 4.

DI CAPACITA'

ARIDI

MISURE MODERNE		lib. franc.	litri
Moggio fr. (144 staja)	,,	2880	1873
fior. (24 staja)	,,	———	585
Tonneau di marina di lib. 2000 fr. (il *tun* ingl. è lib. 2000 ingl.)	,,	2268	———
Sestario (staja 12)	,,	240	156
Mina (staja 6)	,,	120	78
fior. (1/2 stajo) 16 mezzette	,,	———	12,18
Boisseau o *stajo* (16 quartucci)	,,	20	13
fior. (2 mine)	,,	———	24,36
Litron o quartuccio	,,	1 1/4	0,8
fior	,,	———	0,4
Sacco (3 staja)	,,	———	73,1
Quarto (8 mezzette)	,,	———	6,1
Mezzetta (2 quartucci)	,,	———	7,6

Per il legname un traino è 2 br. cub. = metri cub. o steri 0,4
1 br. cub. è 6 bracciola = 0,2
1 bracciolo = 0,03

	Tese quadr.
Jugero quadro q. (2 *atti* q. o pertiche romane q. 288 di 100 pie. rom. q. l'una) = 26120 pie. fr. q. ,,	725,5
Acre di Normandia (160 pertiche q. di 22 pie. l'una) = 77440 pie. q. ,,	2151,1
di Parigi (*arpent*) 100 pertiche q. (di 22 pie.) = 48480 pie. q. ,,	1344,4
Moggio di Napoli = 900 passi quadrati, ciascuno di 7 palmi di lunghezza ,,	729,96
Versura Pugliese = 3600 passi quadrati ,,	2919,85

Antiche fiorentine abolite nel 1782

	br. q. *a terra*		br. *a panno*
Stajoro = stiora 3 = br. q. *a terra*	5184	= br. *a panno*	4624 (d)
Stioro = panora 12 =	1728	=	1541, 3
Panoro = pugnora 12 =	144	=	128, 4
Pugnoro =	12	=	10, 67
Braccio quadro	1		

(d) Infatti perchè 17 br. *a panno* ne fanno 18 *a terra*, per il rapporto delle lor superficie q. la Geometria ci dà $17^2 : 18^2$, o 289 : 324, ossia 324 br. q. *a terra* corrispondono a 289 br. q. *a panno*.

SUPERFICIALI

Comuni fiorentine fissate nel 1782

Quadrato (Q) = 10 Tavole = (are 34,06) Braccia *a panno* 10000
Tavola (T) = 10 Pertiche o Canne = 1000
Pertica (P) = 10 Deche = 100
Deca (D) = 10
Braccio q. (B) = 1

Quindi è che 1.° avendo per esempio 8945632 b. q., col punteggiare le prime quattro cifre si ha 894 Q, 5 T, 6 P, 3 D, e 2 B q.; 2.° avendo 59 Q, 7 T, 4 P, 8 D, e 6 B q., si scriverebbe 597486. 3.°

Stiori							
	1 =	Q —	T 1.	P 5.	D 4.	B q.	1 1/3
	10 =	1.	5.	4.	1.		3 1/3
	100 =	15.	4.	1.	3.		3 1/3
	1000 =	154.	1.	3.	3.		3 1/3
	10000 =	1541.	3.	3.	3.		3 1/3

	Peso francese			Valore in mon. fr		
	onc.	gros.	grani	lire	soldi	denari
Terunzio ,,	—	—	1, 5	—	—	4, 2
Lupino ,,	—	—	7	—	1	6, 7
Obolo (1/2 scrupolo) ,,	—	—	10, 5	—	2	4
Sesterzio (3/4 di scrupolo, *nummus*, *sestertius*) (*e*) ,,	—	—	15, 7	—	3	6
Diobolo (2 oboli) scrupolo rom.	—	—	21	—	4	8
Triobolo (3 oboli) 1/2 dramma o 1/2 grosso ,,	—	—	31, 5	—	7	—
Tetrobolo (4 oboli) ,,	—	—	42	—	9	4
Dramma attica piccola (6 oboli) o danaro rom, (*f*) ,,	—	—	63	—	14	—
Tetradramma (*statera d'argento*) o 3 dramme attiche grandi ,,	—	3	36	2	16	—
Siclo samaritano o ebraico ,,	—	3	50	2	19	1, 3
Dramma attica media ,,	—	1	9	—	18	—
. . . . . grande (4 scrupoli) ,,	—	1	12	—	18	8
Oncia romana (24 scrupoli) 6 grandi dramme att., o 8 piccole (*g*) ,,	—	7	—	5	12	—
Sextans (1/6 d'asse o 2 once) ,,	1	6	—	11	4	—
Statera d' oro (col rapporto di 1 : 10) *aureus*, *chrysos* ,,	2	1	36	14	—	—
Quadrans (3 once) ,,	2	5	—	16	16	—
Triens ,,	3	4	—	22	8	—
Semissis (1/2 asse) ,,	5	2	—	33	12	—

(*e*) Il gr. sesterzio (*sestertium*) è ideale = 1000 sest. picc.
(*f*) Il danaro rom. ora 4 sesterzi o 40 terunzj.
(*g*) L'oncia romana antica sta alla parig. : : 7 : 8.

PESI ANTICHI

	Peso franc.				Valore in mon. fr.		
	libbre	once	gros.	grani	lire	soldi	denari
Asse o libbra rom. (72 gran dramme o 96 picc.) (*h*) ,,	—	10	4	—	67	4	—
Dupondius (2 assi) ,,	1	5	—	—	134	8	—
Mina rom. (*mna*) 60 di esse fanno libb. 100 rom.) ,,	1	1	4	—	112	—	—
. . attica piccola (75 gr. dram., o 100 picc.) (*i*) ,,	—	10	2	36	70	—	—
. . . . grande (100 gr. dram., o 133 1/2 picc.) ,,	—	14	4	48	93	6	8
. . . . talmudica ,,	—	7	2	24	46	13	4
Congio (libb. 10 rom., o 960 dram. pic.) (2 congj = 1/2 urna)	6	9	—	—	672	—	—
Urna (1/2 *quadrantal*) ,,	26	4	—	—	2688	—	—
Quadrantal, amphora, metreta libb. 80 rom.) ,,	52	8	—	—	5376	—	—
Metreta greca (libb. 90 rom.) ,,	59	1	—	—	6048	—	—
Talento attico picc. o comune (4500 dram. gr., o 6000 pic.)	41	—	2	—	4200	—	—
. . . . . . grande (6000 gr. dram., o 8000 pic.) ,,	54	11	—	—	5600	—	—
. . . . italico (*centumpondium* ,,	65	10	—	—	6528	—	—
. . . . alessandrino o ebraico (2 talenti picc.) ,,	82	—	—	—	8400	—	—
. . . . di rame ,,	—	11	8	—	75	—	—

(*h*) Si consideri nella prima istituzione e non dopo le varie riduzioni.

(*i*) 10 picc. mine attiche = 1000 dram. piccole.

PESI

	Libbra parig.			Libbra fior.		
	onc.	gross.	gr.	onc.	dan.	gr.
Berlino (*libbra di 2 marchi*) ,,	15	2	32	16	13	5, 1
Costantinopoli (*Ckeki*) ,,	10	3	28	11	6	12, 5
Dresda e Danzica (*lib. di 2 marc.*) ,,	15	1	7	16	12	2, 1
Firenze (*lib. di 12 once*) (*k*) ,,	11	1/2	20	12	—	—
Leida ,,	14	7	11	16	7	1
Londra (*libbra troy*) ,,	12	1 1/2	1	13	4	8, 1
Londra (*avoir du poids*) (*l*) ,,	14	6 1/2	6	16	—	16, 5
Lucca per il commercio ,,	10	6	22, 5	11	16	12
Monaco di Baviera (*lib. di 2 marc.*) ,,	15	2	23	16	12	19, 5
Modena ,,	11	—	67, 1	12	—	12
Napoli (*libbra*) ,,	10	3 1/2	27	11	8	2, 2
Napoli (*rotolo*) ,,	29	1/2	35	31	11	19, 7
Norimberga ,,	16	5	18	18	—	6, 5
Parigi (*lib. di 2 marc.*) ,,	16	—	—	17	7	5, 7
Reno (*libbra del*) di 7680 gr. Ren. ,,	12	—	32	13	1	—
Roma (*libbra*) ,,	11	1/2	14	11	23	17, 5
Torino (*libbra comune*) di 12 once ,,	10	—	27, 5	13	—	22, 7
Vienna (*lib. di 2 marc.*) nel commercio ,,	18	2	32	19	19	2
Vienna nella zecca ,,	18	2	52	19	19	23, 5

(*m*)

(*k*) Divisione della libbra parig.

grani					
24	danaro	grosso o dramma			
72	3				
576	24	8	oncia		
4608	192	64	8	marco	
9216	384	128	16	2	libbra

Questa lib. è 1/2 chilogrammo.

Divisione della libbra fiorentina

grani				
24	danaro	dramma o grosso		
72	3			
576	24	8	oncia	
6912	288	96	12	1 libbra

Questa libbra = 340 grammi

(*l*) Libbre 2000 ingl. fanno il *tun*.

(*m*) Il cantaro comune è lib. 150 = 51 chilogrammi, e il quintale è lib. 100 = 33,9 chilogr.

MISURE

PER I

MISURE ANTICHE		pol. cub. fr.	pinte fr.
Piede cubico geometrico	,,	1092	22, 7
rom. o metreta (*amphora*)	,,	1296	27
pigma	,,	1555	32, 2
greco o metreta (*cadus*, *diota*) (*n*)	,,	1458	30, 4
Cyatus de' Greci	,,	1, 7	0, 35
de' Latini	,,	2, 25	0, 46
Concha	,,	0, 8	0, 18
Urna	,,	648	13, 5
Congio	,,	162	3, 4

(*n*) Il cado conteneva lib. 90, e l' anfora lib. 80 rom. d' umido; o sia il pie. cub. grec. sta al pie. cub. rom. : : 9 : 8; l' idria era 3 anfore.

DI CAPACITA'

LIQUIDI

MISURE MODERNE		pie. cub. fr.	pinte fr.
Tonnellata com. fr. (3 botti) (l' ingl. è un pò più forte)	,,	24	864
Botte	,,	8	288
Foglietta (1/2 botte)	,,	4	144
		pol. cub. fr.	
Barile fr.	,,	1728	36
fiorentino da vino (20 fiaschi)	,,	3297	68 3/4
da olio (16 fiaschi)	,,	2637	55
Brocca fr.	,,	576	12
Gallon fr. (l' ingl. è piú forte)	,,	192	4
Boccale fr.	,,	96	2
Pinta (l' ingl. è doppia della fr.)	,,	48	1
Fiasco (4 mezzette) da vino		164	3 1/2
da olio	,,	132	
Mezzetta (quartucci)	,,	41	1 3/4
da olio	,,	33	

DI CAPACITA'

ARIDI

MISURE MODERNE		lib. franc.	litri
Moggio fr. (144 staja)	„	2880	1873
fior. (24 staja)	„	——	585
Tonneau di marina di lib. 2000 fr. (il *tun* iogl. è lib. 2000 ingl.)	„	2268	——
Sestario (staja 12)	„	240	156
Mina (staja 6)	„	120	78
fior. (1/2 stajo) 16 mezzette	„	——	12,18
Boisseau o *stajo* (16 quartucci)	„	20	13
fior. (2 mine)	„	——	24,36
Litron o quartuccio	„	1 1/4	0,8
fior	„	——	0,4
Sacco (3 staja)	„	——	73,1
Quarto (8 mezzette)	„	——	6,1
Mezzetta (2 quartucci)	„	——	7,6

Per il legname un traìno è 2 br. cub. = metri cub. o steri 0,4
1 br. cub. è 6 bracciola = 0,2
1 bracciolo = 0,03

Tariffa delle monete Napolitane secondo l' ordinanza del 20 aprile 1818 espresse in valore nominale, acini, cocci, e grammi.

MONETE D' ARGENTO	Acini Napolit.	Cocci Siciliani	Grammi Francesi
Il ducato è l'unità monetaria (a) ,,	515	416,161	22,943
Carlino (tarì Siciliano) ,,	51,5	41, 61	2,294
Tarì (due tarì Siciliani) ,,	103	83,237	4,588
Carlini sei (sei tarì Siciliani) ,,	309	249, 69	13,765
Pezza (scudo, o 12 tarì Siciliani) ,,	618	499, 39	27,532
Vi sono i pezzi antichi di carlini 5,4,3, di grani 26,24,13,12			
MONETE DI RAME			
Mezzo grano, o tornese (grano Siciliano, mezzo bajocco) ,,	70	56, 56	3,118
Grano (bajocco, o 2 grani Siciliani) ,,	140	113, 13	6,237
2 grani e mezzo, o cinquina (5 grani Siciliani baj. 2 1/2) ,,	700	565, 65	37,785
Le antiche hanno il valore nominale, meno i pezzi di grani 4, e 5, che valgono 2 1/2, e 4			
MONETE D' ORO			
Oncetta di ducati tre ,,	85	68.686	3,786
Quintupla di duc. 15 ,,	425	343,434	18,933
Decupla di duc. 30 ,,	850	686,868	37,867
Doppia di ducati 6 per nuova Reale ordinanza ,,	170	137,372	7,572
Titolo della bontà dell' oro è 0,994 = 23, 904 carate, lega 0,006 (b)			
Le antiche restano del valore nominale			

(a) Componesi di 5/6 di argento di coppella, ed 1/6 di lega, segue la division decimale, cioè in 10 carlini, il carlino in 10 grani, il grano in 10 calli (anticamente in 12 calli): la tolleranza delle monete in più, o meno è 0,003

(b) Le [illegible] a peso, ogni acino a grani, 3 1/2, le antiche a grani 3

Tariffa di diverse monete estere in valore di grani Napolitani, e centesimi di grano.

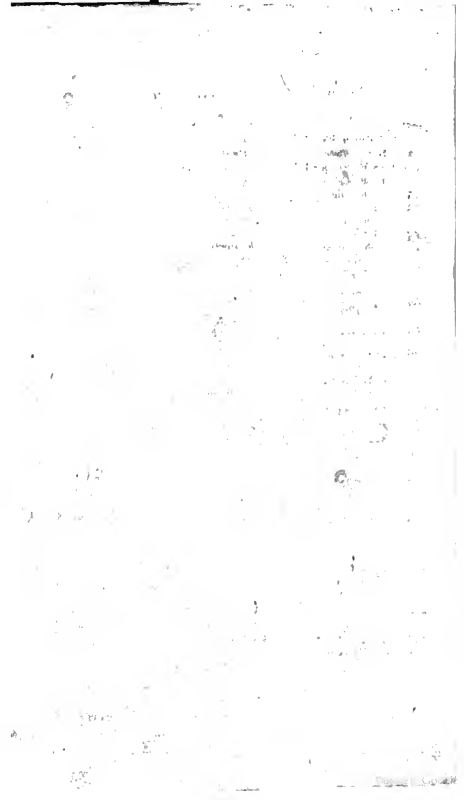
ORO	Grani con centesimi	ARGENTO	Grani con centesimi
Rosponi ,,	818,86	Francesconi ,,	126,51
Zecchino Veneziano ,,	272,95	Scudo Romano ,,	121,84
Zecchino I di Cremnitz ,,	264,08	Scudo di Francia ,,	134,10
Zecchino Romano ,,	265,95	Piastra di Spagna ,,	124,00
Zecchino I delle altre Zecche ,,	263,02	Scudo di Milano ,,	103,54
Lisbonina ,,	1023,71	Scudo di Brabante ,,	130,54
Sovrana di Milano ,,	795;33	Tallero di M. Ter. e Imp- ,,	117,81
Doppia di Spagna conio irregolare ,,	1935,62	*Du Ven* ,,	94,53
Doppia di Genova di 96 lire ,,	1792,85	Cinque fianchi ,,	114,06
Doppia Romana dopo il 1777 ,,	387.79	Franco pari ad una lira Italiana fissata prima del 1812 da' Francesi ,,	22,72
Luigi ,,	535,08	Il suo peso è 5 grammi di argento lordo di 0,1 di liga ,,	
Doppia di Piemonte ,,	641,78	Lire Italiana o franchi ,,	lire 20,723
Doppia di Parma ,,	486,65	Valgono	
Doppia di Spagna delle Zecche ,,	1842,64	Lire di Milano ,,	27,000
Franchi 40 ,,	907,52	Lire di Modena ,,	54,000
Franchi 20 ,,	453,76	Di Reggio, e Mantova	81,000
Durillo ,,	113,02	Di Venezia ,,	40,500
		Di Valtellina ,,	54,900

Tavola de' nuovi pesi, e misure.

MISURE LINEARI	Metri	Tese piedi pol. lin.
Miriametro, lega, ,,	10000	5130.4.5.3,360
Kilometro, miglio, ,,	1000	513.0.5.3,336
Hectometro ,,	100	51.1.10.1.583
Decametro, pertica, ,,	10	5.0.9.4,959
Metro ,,	1	3. 0.11,296
Decimetro, palmo, ,,	0,1	3. 8,330
Centimetro, dito, ,,	0,01	4,433
Millimetro, atomo, ,,	0,001	443
MISURE SUPERFICIALI		
	Metri quadr.	Tese quadrate
Miriare ,,	1000000	263144 93
Kilare ,,	100000	26324.49
Hectare, arpent, tornatura ,,	10000	2632.45
Decare, tavola, ,,	1000	263.25
Are ,,	100	26,32
Deciare ,,	10	2.63
Centiare ,,	1	0,26
		pollici quadrati
Decimetro quadrato ,,	0,01	13.647
MISURE DI CAPACITA'		
	metri cubi	Piedi cubici
Kilolitro, Stero, ,,	1	29,1739
Hectolitro, Soma, ,,	0,1	2.9174
Decalitro, Mina, ,,	0,01	0,2917
		pollici cubici
Litro, decimetro cubo, o Pinta ,,	0,001	50,4124
Decilitro, Coppo, ,,	0,0001	5,0412
Centilitro ,,	0,00001	0,5041
Millilitro, centimetro cubo ,,	0,000001	0,0504
PESI IN GRAMMI		Libre antiche
Miriagramma, Rubbo, ,,	10000	20,4288
Kilogramma, libra nuova, ,,	1000	2,0429
		once
Hectogramma, oncia nuova ,,	100	3,2686
		grosso
Decagramma, grosso nuovo ,,	10	2,6149
		denari
Gramma, denaro nuovo, o centimetro cubo d' acqua ,,	1	0,7845
		grani
Decigramma, grano nuovo ,,	0,1	1,883

INDICE

DE' CAPITOLI, E DEGLI ARTICOLI, NE' QUALI SI SUDDIVIDONO.

ERRORI.			CORREZIONI.
pag.	*lin.*		
4	6	dell' unità	dall' unità
5	8	sessantotto	settantotto
15	13	800789,078,402	8007890784o2
16	17	nnità	unità
35	26	uquale	uguale
38	22	due casi	tre casi
42	1	perciè	perciò
44	25	252	2652
77	1	desumersi	desumesi
82	13	$\frac{63}{5}$	$\frac{62}{5}$
ivi	14	$\frac{265}{189}$	$\frac{265}{186}$
ivi	15	$1+\frac{76}{189}$	$1+\frac{79}{186}$
86	ultima	valore	vale
88	23	in 29	in 28
104	5	31419 ec.	31459 ec.
107	9	3141 ec.	31459 ec.
136	15	mollo	molto
120	17	proporgionali	proporzionali
ivi	22	pro porzsonali	proporzionali
142	17	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$
144	12	$2\ \frac{1}{4}$	$2\ \frac{7}{24}$
219	ultimo	$A = 239 + \frac{5}{6}$	trasportisi a pag. 220
221	13	$\frac{4}{20}$	$\frac{40}{20}$
224	17	2040	2048
227	13	$\frac{982}{4}$	$\frac{972}{4}$
228	6	20480	2048
ivi	14	81192	8192
233	18	1 3 5 ec.	3 5 ec.
300	22	Momete	Monete

Napoli 14 Novembre 1828

PRESIDENZA DELLA GIUNTA
PER LA PUBBLICA ISTRUZIONE.

Vista la dimanda di Raffaele Coda con la quale chiede di volere stampare un *Trattato di Aritmetica dell' abbate Benvenuto Perrone*. Visto il favorevole parere del sig. D. Donato Giglio.

Si permette che l' indicata opera si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà, se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di avere riconosciuto nel confronto uniforme la impressione all' originale approvato.

IL PRESIDENTE
M. COLANGELO.

Pel Segretario Generale e Membro della Giunta.
L' aggiunto
ANTONIO COPPOLA.